Was wäre, wenn *Archimedes*, *Kepler* oder *Darwin* einen Computer gehabt hätte?
Mit zunächst spekulativen Antworten auf diese Frage führen die Autoren in das Thema ein. Dann werden „klassische Ergebnisse" dreier großer Männer der Wissenschaft in insgesamt 11 BASIC-Programmen dargestellt. Dabei werden die theoretischen Grundlagen und die Funktionsweise der Programme in allgemeinverständlicher Form erklärt. Die Programme sind für grafikfähige Kleincomputer gedacht, wobei auf keinen speziellen Computertyp Bezug genommen wird. Für die Umarbeitung in gebräuchliche BASIC-Dialekte geben die Autoren vielfältige Hinweise. Neben Bekanntem, wie der *Archimedischen* Spirale, *Keplers* Faßregel oder dem Prinzip der natürlichen Auslese von *Darwin* findet der an Naturwissenschaft oder Rechentechnik interessierte Schüler, Lehrer, Arbeitsgemeinschaftsleiter, Facharbeiter, Ingenieur oder Wissenschaftler noch eine Fülle von Denkanstößen zum Weitermachen.
Und diejenigen Leser, die dem „Denkzeug" Computer noch weitgehend reserviert gegenüberstehen, können durch das vorliegende Buch durchaus „umprogrammiert" werden.

ISBN 3-343-00229-1

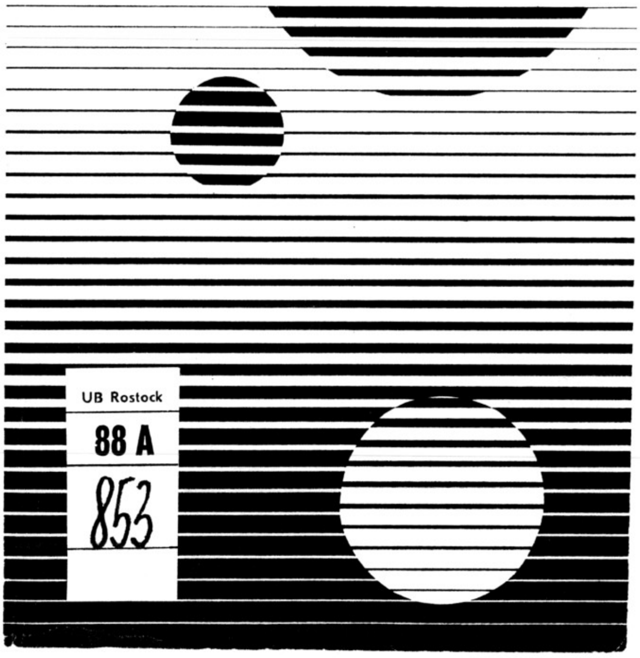
fv

Wenn Kepler einen Computer gehabt hätte

GUTZER/PAUER

GUTZER/PAUER

Wenn Kepler einen Computer gehabt hätte



WENN KEPLER EINEN COMPUTER GEHABT HÄTTE

Von Dr. oec. Hannes Gutzer und
Dr. rer. nat. Hans-Dieter Pauer

Mit 46 Bildern,
4 Tabellen und 11 BASIC-Programmen

VEB FACHBUCHVERLAG LEIPZIG

Gutzer, Hannes:

Wenn Kepler einen Computer gehabt hätte / von Hannes Gutzer und Hans-Dieter Pauer. – 1. Aufl. – Leipzig: Fachbuchverl., 1987. – 176 S.: mit 46 Bild., 4 Tab. u. 11 BASIC-Programmen
NE: 2 Verf.:

ISBN 3-343-00229-1

1. Auflage
Lizenznummer 114-210/2/87
LSV 1089
Verlagslektor: Helga Fago
Gestaltung: Matthias Hunger
Printed in GDR
Satz und Druck: Fachbuchdruck Naumburg
Bestellnummer: 547 229 8
00980

Was wäre, wenn...?

In Erfinderschulen und anderen Ideentrainingskursen wird diese Fragestellung oft genutzt, um die Beweglichkeit des Denkens zu üben. Solche Trainingsaufgaben sind auch unter dem Begriff „Konsequenzen" bekannt. So sollen zum Beispiel möglichst viele und verschiedene Konsequenzen für den Fall angegeben werden, daß ein Jahr lang keine Kinder geboren würden. Man denke nur an die Spielzeugindustrie, die Kindergärten, Schulen und Ausbildungseinrichtungen. Welche Konsequenzen hätte zum Beispiel ein Medikament, das ewig jung erhält, oder ein Computer im Taschenformat, der die menschliche Stimme in einer Sprache aufnimmt und sofort in einer anderen Sprache wieder ausgibt? Bei diesen Ideentrainingsaufgaben werden bewußt außergewöhnliche Tatbestände ausgewählt, deren Realisierung unmöglich ist oder noch in weiter Ferne steht, zum Beispiel der Computerdolmetscher. Hier kann man seine Gedanken einmal so richtig spazierengehen lassen, und gerade das ist ja der Zweck des Ideentrainings.

Man könnte sich auch die Konsequenzen vorzustellen versuchen, wenn GOETHE in seinem Arbeitszimmer ein funktionsfähiges Telefon gehabt hätte (seine Freunde, Bekannten und Kollegen natürlich auch). Hätte er dann auch ein solch hohes Alter bei guter Gesundheit erreicht? Und da beginnen schon die Spekulationen, zu denen solche Anachronismen stets verführen. Genauso tückisch ist die Beantwortung der Frage: Was hätte geschehen können, wenn ARCHIMEDES, KEPLER oder DARWIN einen Kleincomputer in der Größe zweier dicker Bücher gehabt hätten? Lassen wir unseren Gedanken dazu freien Lauf. Zunächst hätten sie zugleich ein Fernsehgerät und ein Kassettenmagnetbandgerät oder zumindest ein Spulentonbandgerät benötigt, um ordentlich mit dem Videocomputer arbeiten zu können. Natürlich funktioniert er auch ohne beide Zusatzgeräte, aber ohne Magnetbandgerät muß man Programme und

Daten stets aufs neue mühsam eintippen, da die Lade- und Speichermöglichkeiten gänzlich fehlen. Hier hätten sicherlich auch ARCHIMEDES oder KEPLER nicht mitgespielt.
Der Bildschirm ist in vielerlei Hinsicht erforderlich. So quittiert er uns optisch die Anweisungen, die wir dem Computer geben, und zeigt uns die Programmlisten an. Und schließlich liefert er uns die Ergebnisse in Form von Zahlen und schwarzweißen oder farbigen Grafiken. Für die Nachwelt hätten wir KEPLER auch noch einen Drucker gewünscht, allerdings keinen Thermodrucker, denn dann wäre nicht nur KEPLER, sondern auch der Inhalt auf dem Wärmereaktionspapier längst verblichen. Eine Kleinbildkamera wäre auch nicht schlecht gewesen, um wenigstens ein paar Bildschirmfotos in die Gegenwart hinüber zu retten.
Sie merken sicherlich, daß die Sache ganz schön kompliziert wird. Nehmen wir an, KEPLER, NEWTON oder DARWIN hätte allein solch einen Kleincomputer mit Zubehör besessen. Der Besitz dieses „Teufelszeuges" hätte im Mittelalter sicherlich ausgereicht, um die Lebenszeit der Gelehrten erheblich zu verkürzen. Ihr Lebenswerk wäre durch den Besitz des Computers also erheblich geringer gewesen.
Nehmen wir deshalb weiter an, daß der Besitz und die Arbeit mit diesen Geräten ohne Gefahr für Leib und Leben möglich gewesen wären, vielleicht durch Geheimhaltung, durch Sondergenehmigung oder weil das dem Stand der Technik entsprochen hätte, dann nähern wir uns langsam unserem Buchvorhaben. Die scharfsinnigen Denker hätten sicherlich als erstes, und das mit vollem Recht, nach dem Nutzen dieses Kastens gefragt. Die Anwort auf diese Frage ist in unserer sich stürmisch entwickelnden Mikroelektronenwelt ständig zu aktualisieren. Wir haben die Beschäftigung mit dem Buch im September 1985 abgeschlossen. Die Aussagen von ARCHIMEDES, KEPLER und DARWIN sind natürlich nach wie vor gültig, Hard- und Software haben aber Jahr für Jahr gewaltige Fortschritte gemacht. Aber auch wir gewannen Erkenntnisse hinzu und würden deshalb heute einiges anders machen und in ein paar Jahren sicherlich wieder anders.

Hannes Gutzer   Hans-Dieter Pauer

Inhalt

1. Der Umgang mit dem Computer

1.1. Was kann ein Kleincomputer?

Hier wäre sicherlich die erste Enttäuschung eingetreten, denn der Computer hätte dem lebensbejahenden KEPLER weder Bier gebraut noch Weintrauben vergoren. Er hätte diese Prozesse bestenfalls überwachen und steuern können. Für ARCHIMEDES hätte er weder Essen noch Trinken zubereiten, ihn wohl aber daran erinnern können, da ARCHIMEDES dies über seinem Grübeln oft vergessen haben soll. Und keinesfalls hätte der Computer die Wäsche gewaschen und den Abfall weggetragen.
Der Computer vermag nur, Riesenmengen von Zahlen oder Texten in einzelne Bits zu zerlegen und diese dann in den unscheinbaren Chips zu verstecken, also zu **speichern**. Und nur dem „Eingeweihten" rückt er sie wieder heraus. Darüber hinaus vermag es der Computer, zwei Bitmuster (das können z. B. zwei Ziffern oder zwei Buchstaben sein) miteinander zu **vergleichen**. Die Gleichheit oder Ungleichheit der beiden Zeichen kann zu einer an die Gleich- oder Ungleichheitsbedingung geknüpften Programmverzweigung führen. Und schließlich vermag der Computer noch zu **addieren** und zu subtrahieren, aber das auch nur in begrenzten Zahlenbereichen. Doch Geduld, das sollte für Vertreter des Altertums, des Mittelalters und der Neuzeit noch kein Grund sein, das Gerät beiseite zu schieben. Der Computerhersteller hat nämlich diese drei Grundfähigkeiten des Computers so ausgebaut, daß letztlich auch das Multiplizieren, Dividieren, Radizieren, Logarithmieren usw. in Millisekunden vollbracht werden. Dazu werden in entsprechenden Herstellerprogrammen die drei Grundfähigkeiten vielfach und geschickt genutzt. Wir brauchen uns also nicht mit den Zahlensystemen des Computers herumzuplagen und auch nicht in dessen Hexenküche der Bits und Bytes (1 byte = 8 bit) hinabzu-

steigen. Schließlich wollen wir keinen Computer bauen, sondern ihn nutzen.

Besinnen wir uns deshalb auf seine Fähigkeiten. Er ist

- ein schneller und genauer Rechner,
- ein sorgfältiger Speicherer und Sortierer von Texten aller Art,
- ein umsichtiger, präziser und vielseitiger Steuerer von Prozessen,
- ein Partner und Trainer für Spiele aller Art,
- ein geduldiger Lehrer und
- ein kreatives Werkzeug zum Musizieren, Malen (Grafik und Farbe) und Dichten.

Das klingt doch schon viel besser. Vielleicht hätte hier auch GOETHE aufgehorcht, nicht so sehr für seine dichterische, sondern mehr für seine wissenschaftliche Arbeit. GOETHE sah sich vor allem als Forscher, denn er schrieb über sich: „Auf alles, was ich als Poet geleistet habe, bilde ich mir gar nichts ein. Daß ich aber in meinem Jahrhundert in der schwierigen Wissenschaft der Farbenlehre der einzige bin, der das Rechte weiß, darauf tue ich mir etwas zugute ..." Wir sehen GOETHE heute in ganz anderem Licht, vermutlich hätte daran auch ein Computer nichts geändert.

Mit dem Computer verhält es sich wie mit jedem anderen Werkzeug auch. Die auszuführende Tätigkeit entscheidet darüber, mit welchem Werkzeug die Tätigkeit besser (z. B. schneller, genauer oder anschaulicher) ausgeführt werden kann. So versuchen die Hersteller von Kleincomputern uns unentwegt klarzumachen, wie hilfreich ein solches Gerät für Rezept- oder Adressensammlungen, für computergesteuerte Kaffeemaschinen und für die Überwachung von Haus, Hof und Garten angeblich sein kann. Aber genau hier tun sich zwei Sackgassen auf, die zeigen, was der Computer eben nicht sinnvoll kann. Die eine führt zum teuren **Einzweckkasten.** Natürlich hätte ARCHIMEDES genau wie wir den Computer als Uhr oder Stoppuhr, unmittelbar mit einem Prozeß gekoppelt, programmieren können. Eine Schaltuhr würde die Sache aber einfacher und billiger realisieren, indem sie früh das Radio zum Wecken und die Kaffeemaschine einschaltet. Und wenn der Computer als elektronischer Hund das Grundstück überwacht, dann ist er in dieser Zeit eben für nichts anderes mehr zu gebrauchen. Auch solche Überwachungsschaltungen sind meist einfacher und billiger von einem geübten Bastler herstellbar. Wir wollen

also den Computer nicht zum Einzweckgerät degradieren und ihn damit seiner Vielfalt berauben.

Die zweite Sackgasse führt zum teuren **Umstandskasten.** Vielleicht wäre es auch KEPLER oder DARWIN zunächst verlockend erschienen, Adressen, Buchbestände, Rezepte oder Beobachtungsergebnisse in den Computer einzuspeichern. Um aber eine Adresse oder ein Rezept zu suchen, muß der Computer eingeschaltet (wir setzen voraus, daß alles schon über Kabel mit dem Fernsehgerät und dem Kassettengerät verbunden ist) und das Programm mit den zugehörigen Daten eingelesen werden. Erst dann können die gewünschten Informationen vom Bildschirm abgelesen werden. Mit Teigresten an den Fingern dürfte die ganze Sache mit einer Rezeptsammlung per Computer noch aufregender werden. Da ist ein Adreßbuch aus Papier mit A—Z-Vorsortierung am Rand allemal schneller und billiger, zumindest für einen normalen Bekanntenkreis, dessen Zahl nach wie vor der Hordengröße des Urmenschen von etwa 50 Personen entspricht. Der Computeraufwand steht hier in keinem Verhältnis zum Nutzen. Unter bestimmten Voraussetzungen (man denke nur an ein Versandhaus für Blumensamen) läßt sich natürlich auch über die Sammlung von Adressen, Bibliotheksbeständen oder Beobachtungsergebnissen im Computer diskutieren. So können z. B. in einem Bibliotheksprogramm 500 oder 1000 Bücher nach Verfasser, Titel oder Verlag abrufbereit stehen. Ebenso wäre eine Sortierung nach Sachgebieten mit gleichzeitiger Alphabetisierung nach Verfassern möglich. Daraus folgt, daß ein Computereinsatz dann sinnvoll werden kann, wenn der Datenbestand eine kritische Größe überschreitet und in diesem Bestand noch sortiert oder umgerechnet werden muß. Allerdings muß der Kleincomputer dann auch schon eine ganze Portion freien Arbeitsspeicherbereich (16 Kbyte sind das mindeste) besitzen.

Aus dem bisher Gesagten wird klar, daß die Spezialisierung der Computer darin besteht, schnell, genau und zuverlässig zu rechnen, zu vergleichen und zu speichern. Damit wird deutlich, daß diese Computer weder ARCHIMEDES noch KEPLER und allen anderen Nutzern das Denken abnehmen können. Deshalb beunruhigt es uns auch nicht, daß wir in 30 Sekunden nur bis 100 zählen können, der Kleincomputer es in dieser Zeit aber bis 7000 (in gemächlichen BASIC-Schritten) oder gar bis zur Millionengrenze (in flotten Schritten der Maschinenprogrammierung) bringt. Das, was zwischen seiner Spezialbegabung und einem leistungsfähigen Schachprogramm liegt, ist menschliche geistige Schwerarbeit. Das hätten unsere Vorfahren genauso wie wir erkennen müssen. Und sicherlich hätten auch sie sich dieser geistigen Herausforderung gestellt. Aber welchen Nutzen hätten sie aus dem Computereinsatz ziehen können? Sie hätten Zeit gespart (obwohl das KEPLER vielleicht gar nicht angenehm gewesen wäre, da er leidenschaftlich gern rechnete) und durch den Umgang mit dem Computer und seinen Programmen Anregungen für neue Fragestellungen und deren Lösungen erhalten. Und das wäre doch schon eine ganze Menge gewesen.

Im vorliegenden Buch werden wir zwei der vorhin genannten sechs Fähigkeiten des Kleincomputers nutzen. Das sind seine Fähigkeiten als schneller und genauer Rechner und als Werkzeug zur grafischen Darstellung der Ergebnisse. Auf seine Fähigkeiten als Textverarbeiter, Prozeßsteuerer, Spielpartner und Lehrer verzichten wir hier, obwohl auch diese Bereiche nicht ohne Reiz sind. Wir bleiben bei den Naturwissenschaften und stellen deshalb die Frage:

1.2. Welche Hardware hätte Kepler benötigt?

Ein englisches Wörterbuch klärt uns auf, daß Hardware mit Metallwaren übersetzt werden kann. Im übertragenen Sinn sind damit alle Teile des Computers gemeint, die eingelötet, eingesteckt, angeschraubt oder angeklemmt sind, also die gesamte Technik zum Anfassen (Schaltkreise, andere Bauelemente, Kabel, Tastatur usw.). Diese gesamte Hardware kann aber nur arbeiten, wenn ein „Fahrplan“ existiert, der angibt, was wann und wo zu geschehen hat. Dieser Fahrplan besteht aus mehreren Programmen, auf die wir im nächsten Abschnitt (Stichwort Software) näher eingehen.

Mit einem Kleincomputer liegen wir, vom Leistungsvermögen und von der Größe her gesehen, in der Mitte einer Dreiergruppe von kleinen Computern. Die kleinsten der Kleinen sind die sogenannten Taschencomputer, die im Gegensatz zu den tastenprogrammierbaren Taschenrechnern in einer Programmiersprache (z. B. BASIC) programmierbar sind. Sie sind transportabel und arbeiten mit Batterie. Dann

folgen die von uns ins Auge gefaßten Kleincomputer. Sie funktionieren nur mit Netzstrom und benötigen zur Arbeit ein Fernsehgerät und einen Kassettenrecorder. Sie besitzen eine schreibmaschinenähnliche Tastatur und sind in mindestens einer Programmiersprache programmierbar. Meist wird eine Grundversion angeboten, die je nach Interessenlage des Nutzers durch Zusätze ausgebaut werden kann. So ist für unser Anliegen die Grafikfähigkeit von Bedeutung. Die Profis in dieser Dreiergruppe sind die Personalcomputer [personal (engl.) persönlich]. Es handelt sich also um einen persönlichen Computer, beim Personal-Auto hat sich dieser Begriff nicht durchgesetzt. Persönlich in dem Sinne, daß der Computer auf dem Schreibtisch des Nutzers diesem jederzeit zur Verfügung steht. Deshalb werden diese Computer auch als Arbeitsplatz- oder Bürocomputer bezeichnet. Das macht deren Professionalität deutlich. Sie sind meist als Stand- oder Tischgerät ausgeführt, es gibt aber auch transportable Versionen. Entscheidendes Merkmal ist das hohe Leistungsvermögen und damit auch der hohe Preis. Bildschirm und Zusatzspeicher sind hier im Gerät integriert und optimal auf das Ganze abgestimmt. Mit solchen Computern kann mehr bewältigt werden als mit einem fünfzehn Jahre alten Großrechner. Für KEPLER und auch für uns sind sie eine Nummer zu groß, denn abgesehen vom Anschaffungspreis wäre auch gleich die Einstellung eines Wartungsmechanikers sinnvoll.

Betrachten wir nun den Kleincomputer mit seinen Kontaktstellen zur Außenwelt etwas genauer. Da fällt als erstes die Tastatur ins Auge, die an eine Schreibmaschine erinnert, aber noch eine Reihe verwirrender Zusatztasten enthält. Mit dieser Tastatur nehmen wir den Dialog mit dem Computer auf. Über sie können wir Programme und Daten (Zahlen, Buchstaben und Sonderzeichen) eingeben und dem Computer sagen, was er tun soll. So können wir ihn anweisen, mit der Abarbeitung eines Programms zu beginnen (Kommando RUN in BASIC), ein Programm von der Magnetbandkassette zu laden (LOAD oder CLOAD) oder ein Programm auf einer Magnetbandkassette zu speichern und damit sicher aufzubewahren (SAVE oder CSAVE). Auf dem Bildschirm des Fernsehgeräts gibt uns der Computer an, ob er unsere Anweisungen verstanden hat und willens ist, sie auch auszuführen. Deshalb ist der Anschluß an das Fernsehgerät der erste wichtige Schritt. Zu diesem

Zweck besitzen alle Kleincomputer eine Ausgangsbuchse, die mit dem Antenneneingang des Fernsehgeräts verbunden wird. Manche Computer sind auf den VHF-Bereich (z. B. Kanal 3 oder 8), andere wieder auf den UHF-Bereich (z. B. Kanal 36) abgestimmt. Dieser Antenneneingang ist eine praktische Sache für uns, allerdings erhält man die Farbwiedergabe durch das mehrmalige Umformen des Signals und wegen der geringen Übertragungsbandbreite nur in mäßiger Qualität. Eine schärfere und klarere Farbwiedergabe wird durch Umgehung des Antenneneingangs erreicht, indem das sogenannte FBAS-Signal (Farb-, Bild-, Austast- und Synchronsignal) vom Videocomputer direkt zum Fernsehgerät geleitet wird. So arbeiten z. B. auch die Monitore im Fernsehstudio oder die Fernbeobachteranlagen im Warenhaus oder im Walzwerk. Viele Kleincomputer haben diesen FBAS-Anschluß, aber nur die wenigsten Fernsehgeräte. Wer also Wert auf schöne Farbgrafiken, Tapeten- oder Strickmuster legt, der muß sein Fernsehgerät in der Werkstatt nachrüsten lassen. Eine noch bessere Bildqualität liefert der RGB-Anschluß, bei dem die Rot-, Grün- und Blausignale aus dem Kleincomputer direkt der Farbbildröhre des Fernsehempfängers zugeführt werden. Aber auch hier sind fachmännische Eingriffe in das Fernsehgerät erforderlich.

Nach Anschluß des Fernsehgeräts an den Computer erhalten wir ein rechteckiges Arbeitsfeld, das meist zwischen 22 und 32 Schriftzeilen aufweist, wobei je Zeile zwischen 32 und 40 Zeichen untergebracht werden können. Damit wird sofort klar, daß ein Kleincomputer nichts von einer Schreibmaschinenseite mit 60 Anschlägen je Zeile hält. Für solche Zwecke gibt es spezielle (und teurere) Textverarbeitungssysteme, die teilweise sogar um 90 Grad gedrehte Bildschirme haben und damit hervorragend Seite für Seite wiedergeben können. Aus alledem folgt, daß die Anforderungen, die wir an das Fernsehgerät stellen, vom geplanten Einsatzfall abhängig sind. Für die Darstellung von Programmzeilen oder Zahlenwerten ist der ausrangierte Fernseher aus der Bodenkammer völlig ausreichend, Freude an Computergrafik vermag er aber nur in geringem Maße zu vermitteln.

Und die Grafik soll ja gerade einer unserer Schwerpunkte sein. Im professionellen Bereich hilft die Computergrafik dem Architekten, Formgestalter, Maschinenbauer, Kartographen und vielen anderen. Natürlich kann es unser Kleincomputer nicht mit solchen Grafiksystemen aufnehmen. Diese arbeiten

mit ein bis zwei Millionen Bildpunkten, Pixel genannt. Zum Vergleich dazu sei unser Fernsehbild genannt, das mit 520000 Bildpunkten arbeitet. Mit zwei Millionen Pixel (engl.: picture elements) können Bilder in Farbe und mit Schattierungen erzeugt werden, die von einer Fotografie nicht mehr zu unterscheiden sind. Solche Systeme sind an schnelle Großrechner mit riesigem Speichervermögen gebunden und dementsprechend teuer.

Kleincomputer liefern grafische Bilder mit 40000 bis 100000 Pixel. Einige wenige bringen es auf über 300000 Pixel. Am gebräuchlichsten sind rund 45000 oder rund 82000 Bildpunkte. Das hat folgenden Grund. Ein einzelnes Zeichen (z. B. ein Buchstabe oder eine Ziffer), das auf dem Bildschirm dargestellt wird, ist meist aus einem 8-mal-8-Punktraster zusammengesetzt. Besitzt der Bildschirm nun z. B. 32 Spalten, so ergeben sich 32 mal 8 = 256 Bildpunkte. 22 Zeilen auf dem Bildschirm ergeben dann 22 mal 8 = 176 Bildpunkte in senkrechter Richtung. Das sind in diesem Beispiel insgesamt 256 mal 176 = 45056 Pixel, die einzeln angesprochen werden können. Das gilt natürlich nur, wenn der Computerhersteller diese, auch als Vollgrafik bezeichnete Pixelgrafik in den Computer eingebaut hat. Eine Vorstufe davon ist die sogenannte Pseudo- oder Quasigrafik. Bei ihr kann als kleinste Einheit nur ein ganzes 8-mal-8-Bildschirmzeichenfeld angesprochen werden. Für solch ein Zeichenfeld hat sich der Hersteller verschiedenartige Grafiksymbole ausgedacht. Das sind meist kleine Quadrate oder Rechtecke, die die Hälfte, ein Viertel oder ein Achtel des gesamten Zeichenfeldes einnehmen. Mit solch einer Pseudografik hätte ARCHIMEDES beim grafischen Darstellen seiner Spiralen keine Freude gehabt (wir auch nicht). Natürlich erfordert eine Pixelgrafik eine entsprechende Computerintelligenz. Hardwareseitig ist der Speicherplatzbedarf für den Bildwiederholspeicher im Computer 6- bis 10mal so hoch als bei einer Pseudografik. Bei Einsatz von Farbe sind die Zahlen noch größer. Auch hier wieder eine kurze Überschlagsrechnung. Für ein Zeichen auf dem Bildschirm benötigt man im Bildwiederholspeicher des Computers 1 byte. Hat der Bildschirm z. B. 24 Zeilen zu je 40 Zeichen, dann braucht man dafür nur 24 mal 40 = 960 byte, also noch nicht einmal 1 Kbyte.

Für die Darstellung eines Bildpunktes in schwarzweiß benötigt man 1 bit. Das sind z. B. bei 49152 Bildpunkten dann 49152:8 = 6144 byte, also 6 Kbyte (1 Kbyte = 1024 byte).

Wenn die Grafik dann noch höher auflöst und das Ganze farbig dargestellt werden soll, werden schon 10 bis 15 Kbyte des kostbaren Speicherplatzes nur für den Bildwiederholspeicher benötigt und gehen damit für unsere Programme verloren.

Ein wichtiges Zubehör zum Kleincomputer ist das Kassettenmagnetbandgerät. Wenn Sie, und das ist als Anfänger sinnvoll, mit dem Computer in der Programmiersprache BASIC arbeiten wollen, so benötigt der Computer ein Hilfsprogramm (auf diesen BASIC-Interpreter kommen wir noch zurück), das die über die Tastatur eingegebenen BASIC-Anweisungen in eine dem Computer verständliche Sprache überträgt. Dieser BASIC-Interpreter kann in drei Varianten existieren. Im einfachsten Fall ist er fest im Innern des Computers gespeichert. Sie können dann nach Einschalten von Computer und Fernsehgerät sofort beginnen. Fast genauso einfach ist die Sache, wenn Sie zum Computer ein kleines Kästchen, einen Modul, kaufen, auf dem der BASIC-Interpreter fest gespeichert ist. Diesen Kasten stecken Sie vor dem Einschalten des Computers in den dafür vorgesehenen Schacht, und schon kann es losgehen. Bei der dritten Variante ist der BASIC-Interpreter auf einer Magnetbandkassette gespeichert (die Sie nie löschen dürfen und deren Band nie in einen „Bandsalat" verwickelt werden sollte). Zum Einlesen dieses BASIC-Interpreters benötigen Sie ein Kassettengerät, Geduld zum Einlesen und Opferwilligkeit, da Ihnen der so geladene BASIC-Interpreter kostbaren Arbeitsspeicherplatz raubt.

Eine wesentliche Funktion des Kassettengeräts ist die Aufbewahrung von Anwenderprogrammen auf einer Magnetbandkassette. Liegt das Programm schon auf einer Kassette vor, dann läuft die Sache ganz einfach. Nachdem der BASIC-Interpreter arbeitsbereit ist, wird das Programm von der Magnetbandkassette in den Arbeitsspeicher des Computers geladen, und es kann losgehen. Wenn das Programm genau für den Computertyp geschrieben wurde und ein ordentlich arbeitendes Kassettengerät benutzt wird, dann ist die Fehlerwahrscheinlichkeit sehr gering. Schwieriger, ja aussichtslos kann die Sache sein, falls zwei verschiedene Computertypen als Programmproduzent und Programmnutzer im Spiel sind. Aussichtslos ist sie dann, wenn die Aufzeichnungsverfahren für die Magnetbandkassette nicht übereinstimmen. Sollten sie jedoch übereinstimmen, so kann der Programmproduzent noch Anweisungen verwendet haben, die der Programmnutzer nicht hat. In diesem Fall

steht das Programm zwar im Speicher des nutzungswilligen Computers, er scheitert aber, weil er bestimmte Anweisungen nicht versteht. Das kann sehr schnell bei unterschiedlich gehandhabten Anweisungen für Grafik, Farbe und Tonausgabe der Fall sein.

Ein selbst erstelltes Programm wird, sobald es auf dem Papier vorliegt, über die Tastatur in den Computer eingegeben. Nach der Fehlerbeseitigung kann es auf einer Magnetbandkassette gespeichert werden. Zu diesem Zweck wird dem Programm ein Name (bis zu 8 oder 10 Zeichen lang) gegeben, unter dem es der Computer auch nach Wochen und Monaten stets wiederfindet und uns auf Wunsch zur Abarbeitung bereitstellt. Bei der Kommunikation zwischen Computer und Kassettengerät werden die Computersignale in solche auch als Zisch- und Pfeiftöne hörbare Signale umgeformt, die das Kassettengerät versteht. Die Geschwindigkeit der Informationsübertragung hängt von bestimmten Schaltungsprinzipien ab. Gute Schaltungen übertragen 150 bis 200 Zeichen (1 Zeichen = 1 byte) je Sekunde. Damit kann eine Seite einer normalen K 60-Kassette bis zu 350 Kbyte fassen und damit schon eine ganze Menge Programme und Daten aufnehmen. Natürlich darf ein einzelnes Programm nicht größer als der im Computer verfügbare Arbeitsspeicherbereich sein. Die sinnvolle untere Grenze eines Arbeitsspeichers für Daten und Programme liegt bei 4 bis 5 Kbyte. Damit ist ein BASIC-Programm von reichlich 100 Programmzeilen gemeinsam mit ein paar Daten speicherbar. Leistungsfähigere Kleincomputer bieten freie Arbeitsspeicherbereiche von 40 bis 48 Kbyte. Für Programme, in denen vorwiegend gerechnet wird, ist relativ wenig Speicherplatz erforderlich. Das ist für unser Buchvorhaben beruhigend. Allerdings werden einige unserer Beispiele doch etwas mehr Speicherplatz beanspruchen, nämlich dann, wenn sich der Computer eine Vielzahl von Grafikpunkten zur weiteren Verarbeitung merken muß. Diese belasten dann den Datenspeicherbereich. Das soll zur Hardware genügen, für ARCHIMEDES, KEPLER, DARWIN und auch für uns.

1.3. Welche Software hätte Kepler benötigt?

Kommen wir auf den „Fahrplan", also die Programme zurück, die dem Computer sagen, wann er was zu tun hat. Diese Programme kann man in drei Gruppen einteilen.

Da gibt es Programme, die die Koordinierung der Rechneraktivitäten übernehmen, es gibt Programme, die der Nutzer für sein Problem geschrieben hat, und es gibt Programme, die dem Menschen das Programmieren erleichtern (sehr wichtig).
Alle diese Programme gehören zur Software, wobei man den Begriff „weiche Ware" wohl nur als Gegenstück zur „harten Ware" gewählt hat. In dieser Software ist der menschliche Geist enthalten, der einen Computer Schach spielen oder einen ökologischen Prozeß simulieren läßt. Die materiellen Träger dieser immateriellen Informationen sind in unserem Fall Magnetbandkassetten und die Speicher, die fest im Computer installiert sind. Hard- und Software sind beim Computer eine Vernunftehe eingegangen. Im Fehlerfall versucht der eine die Schuld auf den anderen zu schieben. Allerdings ist meist die Software am Fehler schuld (also der Mensch, der das Programm geschaffen hat).
Leonardo da Vinci bezeichnete die Musik als die Gestaltung des Unsichtbaren. Das trifft für die Computersoftware ebenso zu. So wie man durch die Aneinanderreihung von Noten Bach oder Beat spielen kann, so kann gleichfalls durch die Aneinanderreihung von Anweisungen an den Computer eine geometrische Figur gezeichnet oder der Rauminhalt eines Weinfasses berechnet werden. Allerdings fällt dem Anfänger die Aneinanderreihung dieser Anweisungen sehr schwer. Die meisten unserer Tätigkeiten sind an Vorstellungen gebunden. So versucht auch der Fahrschüler bei seinen ersten Anfahrversuchen, sich die Funktionsweise von Kupplung und Gaspedal vorzustellen. In dieser gedanklichen Welt spielt die Reihenfolge des Handlungsablaufs eine große Rolle. Für Bach war das Klavier- und Orgelspiel eine einfache Sache, man mußte seiner Ansicht nach nur zur rechten Zeit die rechte Taste drücken. Und da ist der Unterschied zwischen Klavier- und Computertasten gar nicht mehr so groß, denn in beiden Fällen gilt das „Tue das, dann das"-Prinzip. So kann durch die gekonnte Aneinanderreihung von Tastenbetätigungen ebenso Neues geschaffen werden, wie durch die Aneinanderreihung von Pinselstrichen Gemälde entstehen. Mit diesem „Tue das, dann dies, dann das erste noch einmal und dann das weitere" legen wir menschliches Wissen und Können „scheibchenweise" zunächst auf dem Papier und dann auf einer Magnetbandkassette oder dem Speicher des Computers ab. In dieser Vergegenständlichung des Wissens, also in seiner Aufbereitung für den „beschränkten" Computer, liegt die große Leistung, zu der eben nur der Mensch selbst fähig ist. Diese Erkenntnis hätte schon zu Archimedes' Zeiten genauso wie heute gegolten. Der jeweilige Entwicklungsstand von Wissenschaft und Technik bestimmt lediglich die konkreten Formen und Werkzeuge, die der Mensch einsetzen kann.
Unsere Vorfahren hätten genauso wie wir alle drei Arten von Software gebraucht. Als erste sei hier die **Firmware**, also das Betriebssystem des Computers, genannt. Auf diese Software haben wir keinen Einfluß, sie wurde schon bei der Herstellung des Computers in dessen Nur-Lesespeicher für immer und ewig fest eingeschrieben. Schon wenn wir nach dem Einschalten des Computers eine Taste drücken, wird diese Software aktiv, denn die Verbindung zwischen Tastenfeld und Mikroprozessor (dem Herzstück des Computers) muß über einen entsprechenden Programmteil gesteuert werden. Soll dann mit dem LOAD-Kommando vom Kassettengerät ein Anwenderprogramm in den Computer geladen werden, dann muß auch diese Tätigkeit von einem Programmteil des Betriebssystems gesteuert werden. Dessen innerer Aufbau kann uns getrost ein Rätsel bleiben. Die Bedienungsanleitung zum Computer sagt uns, was wir mit ihm und seinem Betriebssystem alles anstellen können.
Die zweite Art von Software sind die **Anwenderprogramme** selbst. Im vorliegenden Buch werden wir die von uns erarbeiteten Anwenderprogramme dem Leser ausführlich vorstellen. Er kann sie gedanklich nachvollziehen oder dem ihm zur Verfügung stehenden Computer „einverleiben". Das wird allerdings nicht immer ohne Änderungen abgehen, wir geben dazu noch Begründungen und Hinweise. Der Leser wird dafür Sorge tragen müssen, daß der eingesetzte Computer mit seiner Hard- und Firmware auch in der Lage ist, die ihm angebotene Anwendersoftware aufzunehmen und zu begreifen, denn Sie wissen ja: Gesagt heißt noch nicht gehört, gehört noch nicht verstanden, verstanden noch nicht einverstanden und einverstanden noch nicht angewendet. Der Computer muß also die Form des Informationsträgers und den Inhalt der Information akzeptieren. Die Verständigung setzt bestimmte Vereinbarungen voraus. Voltaire sagte das so: „Bevor ich mit Ihnen über etwas reden kann, müssen Sie Ihre Ausdrücke definieren!"
Und damit kommen wir zur dritten Art von Software, den

Programmierhilfsmitteln, die die Herstellung von Anwenderprogrammen auf menschenfreundliche Art und Weise gestatten. Ideal wäre da natürlich ein Computer, der unsere menschliche Sprache direkt in Computeranweisungen umsetzen könnte. Unter diesem Gesichtspunkt sollte ein Computer so intelligent wie möglich sein. Aber diese Intelligenz des Computers ist an zwei Dinge gebunden. Da ist zum ersten die Software, die letzten Endes wieder der intelligente Mensch hineingepackt hat, und zum zweiten die Hardware, die diese Software auch versteht. Mit solcher Hardware sah es aber zu Beginn der Rechentechnik ziemlich schlecht aus. In den 50er und 60er Jahren waren geringer Speicherplatz und niedrige Rechengeschwindigkeit die wesentlichen Hinderungsgründe zur Entfaltung einer Computerintelligenz. Deshalb gab es damals für den Umgang mit dem Computer nur die Möglichkeit, auf sein elementares Niveau herabzusteigen oder es ganz sein zu lassen. Mit dem Aufkommen der leistungsfähigen Mikrorechentechnik hat sich diese Situation wesentlich verbessert, und bei optimistischer Sicht sind am Horizont schon Computer erkennbar, die Teile unserer normalen Umgangssprache verstehen und als Handlungsanweisungen für sich umsetzen. Dennoch müssen sich auch heute noch Experten (dazu zählen wir uns nicht) mit den „Urlauten" des Computers befassen. So ist z. B. das Betriebssystem eines Computers in diesen Urlaut-Befehlen geschrieben, denn solche Programme werden vom Computer wahnsinnig schnell abgearbeitet. Man spricht hier von einer Programmierung in Maschinensprache, wobei das Wort „Sprache" für diese Urlaute als purer Hohn erscheint. Mit der Programmierung in diesem Maschinencode hätten wir vermutlich auch Kepler oder Archimedes nicht für den Computer begeistern können. Da müssen schon menschenfreundliche Programmierhilfsmittel her.

Die nächste Möglichkeit ist deshalb die Programmierung in einer maschinenorientierten Programmiersprache. Wir sagen auch Assemblerprogrammierung dazu, weil hier ein Assembler [assemble (engl.) versammeln, zusammenstellen] in einem Übersetzungsvorgang das vom Menschen geschriebene Programm zu dem eigentlichen Maschinenprogramm mit den Urlauten zusammenstellt. Von einer Sprache kann aber immer noch nicht die Rede sein, und auch die Assemblerprogrammierung bleibt den Experten vorbehalten. Der Vorteil der Assemblerprogrammierung im Vergleich zur Programmierung im Maschinencode besteht in der Verwendung sogenannter Mnemonics. Mnemonik ist die Kunst, das Gedächtnis durch Merkworte oder -sätze (Eselsbrücken) zu unterstützen. Allerdings sind bei der Programmierung nach wie vor Kenntnisse über die Intimsphäre des verwendeten Mikroprozessors unerläßlich. Daraus folgt, daß Assemblerprogramme nur für einen bestimmten Prozessortyp gültig und damit in der allgemeinen Verwendbarkeit stark eingeschränkt sind. Schon aus diesem Grund (vom Programmieraufwand einmal ganz abgesehen) scheidet auch die Assemblerprogrammierung für unser Buchvorhaben aus.

Sonnenschein am Programmierhorizont vermögen erst die problemorientierten Programmiersprachen zu schaffen. Es gibt rund 30 solcher Programmiersprachen auf der Welt. Beim Arbeiten mit einer Programmiersprache brauchen wir keine Gedanken mehr darauf zu verschwenden, was im Innern des Computers vor sich geht und wo sich welche Befehle und Daten herumtreiben. Diese Arbeit nimmt uns eine besondere Umwandlungssoftware ab, die letzten Endes natürlich wieder alles in die dem Computer verständlichen Urlaute umwandelt. Uns interessiert aber nicht im Detail, wie sie das tut.

Diese Umwandlungssoftware kann wie ein Übersetzer oder wie ein Dolmetscher arbeiten (der Assembler arbeitet stets wie ein Übersetzer). Wenn der Sprachmittler in seinem Büro sitzt, dann wird ihm ein vollständiger Text mit einer bestimmten Seitenzahl vorgelegt, den er in einem Stück (von den ihm zustehenden Pausen einmal abgesehen) übersetzt und dann die Übersetzung an den Auftraggeber ausliefert. Damit ist die Sache für ihn erledigt, und er kann andere Texte übersetzen oder Urlaub machen. So funktioniert auch der Übersetzer (hier **Compiler** genannt) im Computer. Das ganze Programm wird in einer Programmiersprache, z. B. PASCAL, eingegeben, und dann übersetzt der PASCAL-Computer das Programm in den Maschinencode des betreffenden Computers. Zur Abarbeitung des Programms ist dann der Compiler nicht mehr erforderlich, er kann im Speicher gelöscht werden.

Anders verhält sich die Sache, wenn der Sprachmittler als Dolmetscher arbeitet. Hier muß er während des gesamten Gesprächs der beiden Kommunikationspartner anwesend sein und Satz für Satz übersetzen. Selbst wenn ein Gesprächspartner bei Verhandlungen immer wieder dasselbe

sagt, so muß er das auch immer wieder in die andere Sprache übersetzen. Dieses schrittweise Übertragen in eine andere Sprache dauert natürlich länger als die Übersetzung, dafür können Mißverständnisse sofort aus dem Weg geräumt werden, denn der Dolmetscher ist ja immer anwesend. Ein solcher Dolmetscher wird in der Rechentechnik als **Interpreter** bezeichnet. Interpreter arbeiten zwar langsamer als Compiler, aber die sofortigen Programmkorrekturmöglichkeiten sind ein riesiger Vorteil.
Karl V. soll einmal gesagt haben: „Ich spreche Spanisch mit Gott, Italienisch mit Frauen, Französisch mit Männern und Deutsch mit meinem Pferd." Wir wissen nicht, in welcher Sprache er mit einem Videocomputer gesprochen hätte, aber mit großer Wahrscheinlichkeit hätte auch Karl V. in BASIC mit ihm verhandelt, da fast alle kleinen Computer auf der Welt diese Sprache verstehen. Aber wie schon gesagt, BASIC ist nur eine von rund 30 Programmiersprachen. So wie Darwin über die Entwicklung der Arten nachgedacht hat, so lassen sich auch Stammbäume von Programmiersprachen aufstellen, da einige miteinander versippt und verschwägert sind. Die Namen für Programmiersprachen sind meist aus Abkürzungen zusammengesetzt. Der Sprachwissenschaftler nennt sie Akronyme. Ausnahmen bilden die Sprachen PASCAL und ADA, die ihre Namen von Vorreitern der Rechentechnik erhalten haben. Pascal kennen Sie sicherlich, Ada vielleicht nicht. Es handelt sich hier um Ada Augusta, Countess of Lovelace, die mathematisch hochbegabte Tochter des englischen Schriftstellers Lord G. G. Byron. Sie hat Babbage, auch ein bekannter Rechentechnik-Pionier, mit Geld und Ideen zum Bau und zur Programmierung seiner Rechenmaschinen unterstützt.
Die Klassiker unter den Programmiersprachen sind FORTRAN (Abkürzung für **Formula Translator**, also Formelübersetzer), COBOL und ALGOL. Sie wurden alle zwischen 1954 und 1960 für Großcomputer (zumindest das, was man damals darunter verstand) entwickelt, denn an Kleincomputer war zu dieser Zeit noch nicht zu denken. Diese Programmiersprachen bildeten die Basis für die Sprachen, die heutige Mikrocomputer benutzen. So stammen die Sprachen C, PASCAL und ADA von ALGOL ab. BASIC und PILOT wiederum sind Abkömmlinge von FORTRAN. Bei der Entwicklung der Sprachen LOGO und FORTH hat die Sprache LISP Pate gestanden. Für kleine Computer

gewinnt FORTH wegen seiner Flexibilität und der einfachen individuellen Erweiterungsmöglichkeiten zunehmend an Interesse. Allerdings zeigt FORTH mehr „Maschinennähe" als beispielsweise BASIC, ist dafür aber auch fünf- bis zehnmal so schnell in der Befehlsausführung. Deshalb eignet sich diese Sprache auch gut für Steuerungsaufgaben oder schnelle Spiele, aber beides wollen wir hier nicht verfolgen.
Die Programmiersprachen C, PASCAL und ADA existieren vorwiegend als Compiler-Sprachen. Sie sind damit schnell, aber zugleich umständlich bei erforderlichen Korrekturen. Während die Sprachen C und ADA für den Einsteiger wenig geeignet sind (u. a. keine genormten Ein- und Ausgabebefehle), erobert sich PASCAL zunehmend die Kleincomputerwelt. Zwischen PASCAL und BASIC werden in der Literatur regelrechte Kämpfe ausgetragen. Abgesehen davon, daß PASCAL meist als Compiler und BASIC meist als Interpreter geliefert werden, haben beide Sprachen ihre Vor- und Nachteile. PASCAL wurde 1970 von N. Wirth an der Eidgenössischen Technischen Hochschule in Zürich entwickelt. Sie kann als Paradebeispiel einer modernen und „sauberen" Programmiersprache dienen. Sauber deshalb, weil sie eine klar strukturierte und damit auch übersichtliche Programmierung gestattet. Diese Tatsache und die Möglichkeit, schon zu Programmbeginn die Datentypen für alle verwendeten Variablen festzulegen, erzieht zu einer geistigen Disziplin bei der Programmherstellung. Aber die Sauberkeit im Programmieren ging mit einer Vernachlässigung der Verarbeitung von Texten und Grafiken einher, besonders, was deren Darstellung auf dem Bildschirm betrifft. Da wird die Tatsache nicht verwundern, daß genau dies eine Stärke von BASIC ist. Um diese Nachteile zu beseitigen, erweiterte jeder Computerhersteller seinen PASCAL-Compiler mit Ausgabeanweisungen, die dann aber alles andere als einheitlich waren. Es gibt zwar inzwischen einen neuen PASCAL-Standard, aber die bisher geschriebenen Programme leiden unter mangelnder Austauschbarkeit.
Allerdings hat BASIC ebenfalls mit solchen nicht genormten Erweiterungen zu kämpfen. Das ist, historisch gesehen, auch verständlich. BASIC wurde mit rund 50 Grundbefehlen 1965 von J. G. Kemeny und T. E. Kurtz am Dartmouth College in den USA entwickelt, und zwar als Einführungskurs für Schüler in die Informatik. Darauf weist auch der Name **B**eginners **A**ll Purpose **S**ymbolic **I**nstruction **C**ode hin.

Für Anfänger soll natürlich alles einfach sein, sie sollen schnell ein Erfolgserlebnis haben. Diese Forderung erfüllt BASIC, besonders unterstützt durch das Interpreterprinzip, in hervorragender Weise. Aber was wird, wenn sich der Anfänger zum ausgefuchsten Programmierer entwickelt? Dann erkennt er die Grenzen von BASIC sehr schnell und muß sich damit abfinden oder die Sprache wechseln. Allerdings wird uns das (und wir unterstellen das auch Kepler, Archimedes u. a.) nicht belasten, da wir eben keine Programmierexperten werden wollen. Und noch etwas sollte zur Historie von BASIC gesagt werden. In den 60er Jahren dachte noch niemand an einen Kleincomputer mit seinen stattlichen Hardwareleistungen. Computergrafik war damals, sofern es sie überhaupt gab, den Großen vorbehalten, und an den Einsatz eines normalen Fernsehgeräts war auch noch nicht zu denken. Ganz zu schweigen vom Farbfernsehen, das zwar schon 1953 in den USA, aber erst 1967 in Europa eingeführt wurde. So verwundert es auch nicht, daß die Bildschirmausgabe in BASIC über die Anweisung PRINT erfolgt, obwohl hier überhaupt nichts gedruckt wird [print (engl.) drucken]. Auch bei BASIC erweiterten die Hersteller ihre BASIC-Interpreter mit Schwarzweiß- und Farbgrafik und mit Musik. So gibt es heute leider rund fünfzig BASIC-Dialekte, also nicht genormte Erweiterungen. Diese mangelhafte Austauschbarkeit, die mäßige Abarbeitungsgeschwindigkeit und die bescheidene Strukturierungsfähigkeit haben die Sprache BASIC etwas in Mißkredit gebracht. Dennoch gibt es kaum einen Kleincomputer, der diese Sprache (allerdings in seinem Dialekt) nicht versteht.
Natürlich sind auch bei BASIC neue Normierungsbestrebungen im Gange. Ein erfolgversprechender Ansatz ist der MSX-Standard, dem sich immer mehr Hersteller aus aller Welt anschließen. MSX steht für **M**icrosoft **S**uper E**x**tended, d. h., die Grundlage für diesen Standard bildet der weit verbreitete BASIC-Dialekt der amerikanischen Firma Microsoft. Schwerpunkt der Vereinheitlichung ist alles, was mit der Darstellung von Text und Grafik auf dem Bildschirm zusammenhängt. Daß dabei ein stattlicher Interpreter (stattlich in der Leistung und im Speicherplatzbedarf) herauskommt, versteht sich von selbst. Das MSX-BASIC hat 160 verschiedene Anweisungen und Funktionen. Der Bildschirm ist in 24 Zeilen zu je 40 Zeichen (allerdings werden z. T. auch nur 32 Zeichen dargestellt) aufgeteilt. Für die

Grafik können 256 mal 192 Pixel angesprochen werden. Die Grafiken im vorliegenden Buch entsprechen etwa diesen Angaben. Allerdings ist mittlerweile ein MSX-2-Standard im Gespräch, der auf 512 mal 212 Pixel orientiert. Im MSX-BASIC sind 16 Farben darstellbar. Der eingebaute Tongenerator umfaßt mindestens 8 Oktaven mit dreistimmigen Akkorden. Zum Standard gehören auch ein genormter Anschluß (V.24-Schnittstelle) zum Betreiben eines Druckers und Anschlüsse für einen Kassettenrecorder (mit genormtem Übertragungssystem) und zwei Spielhebel. Die BASIC-Programmzeilen lassen sich ohne Probleme auf dem Bildschirm mit einem sogenannten Bildschirm-Editor korrigieren. Wer schon einmal programmiert hat, wird das ganz besonders zu schätzen wissen. Teile dieses Standards werden wir auch in unseren Programmen verwenden. Damit haben wir dem Leser schon angedeutet, daß wir uns für die Programmiersprache BASIC entschieden haben, eine Empfehlung, die wir auch unumwunden den großen Vorreitern der Mathematik und Naturwissenschaft gegeben hätten.

1.4. Worauf legen wir uns fest?

Wir werden also die Programmiersprache BASIC benutzen. Und das aus folgenden Gründen:

1. BASIC ist die zur Zeit am weitesten verbreitete Programmiersprache für Kleincomputer, so daß wir die Gewähr haben, daß ein großer Teil der Leser unsere Programme auch versteht und ein vielleicht etwas kleinerer Teil sich den Wunsch erfüllen kann, die Programme nachzuvollziehen. Dazu werden wir entsprechende Erklärungen anfügen.
2. Da BASIC in den meisten Fällen als Interpreter vorliegt, kann der Leser die vorgestellten Programme auf einfache Weise dem ihm zur Verfügung stehenden Computer anpassen und die Konsequenzen von gezielten Änderungen erleben.
3. Einen Schwerpunkt unserer Programme bilden grafische Ausgaben. Hier bietet BASIC einfache und elegante Anweisungen, um die Pixel auf dem Bildschirm an die richtige Stelle zu setzen.

Für unsere Programme werden wir einen Bildschirm benutzen, der in 22 Zeilen zu je 32 Zeichen aufgeteilt ist. Dabei ist (und dies ist eine generelle „Tücke" in der Rechentechnik)

zu beachten, daß die Zählung mit der Zeile 0 und der Spalte 0 beginnt. Ein Zeichen (z. B. ein Buchstabe, eine Ziffer oder ein Sonderzeichen) läßt sich mit der Anweisung PRINT AT (Zeile, Spalte) an jede beliebige Stelle des Bildschirms setzen, wobei in diesem Fall die Zählung in der linken oberen Ecke beginnt. So liefert z. B. die Anweisung PRINT AT (0,31); „A“ in der rechten oberen Ecke des Bildschirms den Buchstaben A. Die Anweisung PRINT AT (10,15); „?“ liefert in der 11. Zeile und 16. Spalte (also fast in der Mitte des Bildschirms) ein Fragezeichen. Übrigens gibt es auch BASIC-Interpreter, die die Zeilen- und Spaltenzahl bei der PRINT AT-Anweisung ohne Klammern haben wollen.
Die Anzahl der verfügbaren Pixel für die Grafik ergibt sich aus den 22 Zeilen zu je 32 Zeichen des Bildschirms. Jedes Zeichen ist aus einem 8-mal-8-Punkt-Raster zusammengesetzt. Damit ergeben sich in x-Richtung 32 mal 8 = 256 und in y-Richtung 22 mal 8 = 176 Pixel. Das sind insgesamt 256 mal 176 = 45056 Pixel, die wir einzeln darstellen können. Damit liegen wir an der unteren sinnvollen Auflösungsgrenze für grafische Darstellungen. Es gibt auch Kleincomputer, die nur eine Darstellung von z. B. 160 mal 96 Pixel und weniger zulassen. Liegt die Anzahl der möglichen Pixel in x- und y-Richtung unter der von uns gewählten, dann müßten die hier vorgestellten Programme in ihren Ausgabeteilen gänzlich umgearbeitet werden. Wir raten aber davon ab, da die mangelhafte Auflösung doch keine rechte Freude aufkommen lassen wird.
Steht ein Computer zur Verfügung, dessen verfügbare Pixelanzahl größer als in unserem Fall ist, dann können die Programme zunächst problemlos übernommen werden. Allerdings ist die Symmetrie gestört, und es wird Auflösungsqualität verschenkt. Wir halten es hier mit VOLTAIRE: „Die nützlichsten Bücher sind diejenigen, die den Leser veranlassen, sie zu ergänzen und weiterzuführen“, indem wir Bücher durch Programme und Leser durch computerfreak [freak (engl.) verrückter Kerl, natürlich im besten Sinne] ersetzen.
Auch die Zählung der Pixel beginnt wieder bei 0, sowohl in x- als auch in y-Richtung. Allerdings beginnt sie bei den meisten Interpretern in der linken unteren Bildschirmecke, so wie wir das von grafischen Darstellungen her gewöhnt sind. Unsere x-Achse geht damit von 0 bis 255 und die y-Achse von 0 bis 175. Die Grafik-Anweisungen sind in BASIC schon stark vom jeweiligen BASIC-Dialekt abhängig. Gute

Interpreter bieten aber meist folgende Anweisungen:

PLOT x-Koordinate, y-Koordinate oder

PSET x-Koord., y-Koord.

DRAW x-Richtung, y-Richtung

CIRCLE x-Koordinate, y-Koordinate, Radius

Die wichtigste Anweisung ist die PLOT- oder PSET-Anweisung. PLOT 255,0 liefert z. B. ein Pixel in der unteren rechten Bildschirmecke. Soll ein Pixel in Bildschirmmitte gesetzt werden, so muß PLOT 128,88 oder PLOT 127,87 eingegeben werden.
Nun kann es natürlich nicht im Sinne des Erfinders sein, für die zwei Geraden eines x, y-Koordinatensystems Hunderte von PLOT- oder PSET-Anweisungen einzugeben. Für solche Zwecke bietet sich die DRAW-Anweisung an. Auf der Grundlage der zuletzt gesetzten PLOT-Position wird mit DRAW eine Gerade gezogen, die x Pixel rechts davon und y Pixel oberhalb davon endet. Negative Vorzeichen für x und y kehren die Richtung entsprechend um. Ein Koordinatensystem im linken Teil des Bildschirms kann damit folgendermaßen „gebaut“ werden:

```
10 PLOT 0, 0 : DRAW 255,0

20 PLOT 0, 0 : DRAW 0,175
```

Die DRAW-Anweisung darf nicht mit der DRAWTO-Anweisung anderer Interpreter verwechselt werden. Mit der DRAWTO-Anweisung wird nicht die Veränderung in x, y-Richtung, sondern direkt der anzusteuernde Endpunkt angegeben.
Wieder andere Interpreter bieten zum Zeichnen von Geraden die Anweisung LINE XA,YA,XE,YE. In diesem Fall wird eine Gerade von einem Anfangspunkt mit den Koordinaten XA,YA zu einem Endpunkt mit den Koordinaten XE,YE gezogen.
Stehen solche Anweisungen wie DRAW, DRAWTO oder LINE nicht zur Verfügung, dann kann man sich mit Laufanweisungen aus der Affäre ziehen. Natürlich dauert in diesem Fall das Zeichnen der Geraden viel länger als mit einer speziellen Anweisung. So zeichnen zum Beispiel folgende

Programmzeilen eine x- und y-Achse auf den Bildschirm:

```
10 FOR X = 0 TO 255 : PLOT X, O : NEXT X

20 FOR Y = 0 TO 175 : PLOT O, Y : NEXT Y
```

Schwieriger wird das Ganze, wenn beliebige schräge, senkrechte und waagerechte Geraden gezeichnet werden sollen. Ein möglicher Weg führt über die Anwendung der Zweipunktegleichung. Um in allen auftretenden Fällen annähernd geschlossene Linienzüge zu erreichen, muß, in Abhängigkeit vom Anstieg der zu zeichnenden Geraden, entweder die Gleichung $y=f(x)$ oder $x=f(y)$ verwendet werden. Beide Gleichungen werden im folgenden Unterprogramm als Funktionen definiert:

```
  10 REM UP LINE
  20 DEF FN G(X)=(X*(YE-YA)-XA*Y
E+XE*YA)/(XE-XA)
  30 DEF FN H(Y)=(Y*(XE-XA)-XE*Y
A+XA*YE)/(YE-YA)
  40 IF ABS (XE-XA)>ABS (YE-YA)
THEN GO TO 100
  50 REM X=F(Y)
  60 IF YA<YE THEN LET ST=1: ELS
E LET ST=-1
  70 FOR J=YA TO YE STEP ST
  80 PLOT FN H(J),J
  90 NEXT J: RETURN
 100 REM Y=F(X)
 110 IF XA<XE THEN LET ST=1. ELS
E LET ST=-1
 120 FOR J=XA TO XE STEP ST
 130 PLOT J,FN G(J)
 140 NEXT J: RETURN
```

In der Programmzeile 40 wird die Gleichung ausgewählt, bei der der absolute Betrag der Differenz zwischen Anfangs- und Endpunkt der unabhängigen Variablen am größten ist. Damit wird stets für annähernd geschlossene Linienzüge gesorgt. In den Zeilen 60 und 110 wird die Schrittweite ST mit 1 oder n — 1 festgelegt, je nachdem, ob in der folgenden FOR-NEXT-Schleife vorwärts oder rückwärts gezählt wird. In den Zeilen 80 oder 130 wird dann durch Setzen der berechneten Pixel gezeichnet (evtl. PLOT durch PSET oder ähnlich ersetzen). Bei der Einbindung dieses Unterprogramms können die Zeilennummern gemeinsam mit der GOTO-Anweisung in Zeile 40 beliebig geändert werden. Besondere Aufmerksamkeit ist aber der Verwendung der Variablennamen XA, YA, XE, YE, ST und J im Hauptprogramm zu schenken. Selbst definierte Funktionen im Hauptprogramm dürfen nicht die Funktionsbezeichnungen G(X) und H(Y) tragen.

Die CIRCLE-Anweisung ermöglicht das Zeichnen von Kreisen. So wird mit CIRCLE 128,88,70 der Kreis für eine „Fernsehuhr" mit einem Radius von 70 Pixeleinheiten gezeichnet. Steht diese Anweisung nicht zur Verfügung, dann muß mit der Sinus- und Cosinus-Funktion operiert werden. Folgendes kleines Programm liefert das gleiche:

```
10 FOR I = 0.01 TO 2 * PI STEP .01

20 PLOT 128 + 70 * COS (I), 88 + 70 * SIN (I)

30 NEXT I
```

Damit dauert das Zeichnen des Kreises länger, dafür ist er aber auch exakter als mit der CIRCLE-Anweisung. Bei den meisten BASIC-Interpretern müssen die Argumente von Funktionen in Klammern gesetzt werden. Das betrifft mathematische Funktionen, z. B. COS (I), Textverarbeitungsfunktionen, z. B. LEN (A$), und Ausgabefunktionen, z. B. PRINT AT (0,1) oder PRINT TAB (K). Interpreter, bei denen mit einem Tastendruck eine Funktion aufgerufen werden kann, benötigen diese Klammern im allgemeinen nicht. Überprüfen Sie deshalb auf Ihrem Computer als erstes sein „Klammerverhalten", wenn unsere Programme nicht laufen sollten. Des weiteren müssen in den meisten Fällen die Argumente für trigonometrische Funktionen im Bogenmaß eingegeben werden. Daraus folgt, daß bei Angaben in Grad der Wert mit π multipliziert und durch 180 geteilt werden muß. Das ist aber kein Problem, da dies direkt als Argument geschrieben werden kann.

Die einzelnen BASIC-Dialekte weichen besonders stark voneinander ab, wenn es um die Vereinbarung von Farben, blinkenden Zeichen, veränderlichen Helligkeitsstufen oder Negativdarstellungen geht. Aus diesem Grund haben wir auf all diese Raffinessen, die ein Programm natürlich attraktiver machen, weitgehend verzichtet. Tauchen dennoch solche, für Ihren Interpreter unverständliche Anweisungen auf, so lassen Sie diese zunächst weg.

Wir werden vorwiegend die PLOT-Anweisung (entspricht PSET) verwenden, um einen hohen Grad an Allgemeingültigkeit zu erreichen. Damit werden Anpassungsarbeiten für den BASIC-Kenner kein Problem sein.

Und noch zwei Dinge wollen wir erwähnen, die den Leser vielleicht stören könnten. Das ist zum einen die inkonsequente Verwendung von Klein- und Großbuchstaben in

Gleichungen und BASIC-Programmen. Der Tradition folgend, verwenden wir in Gleichungen Kleinbuchstaben. Das könnten wir in den BASIC-Programmen auch tun, aber manche Interpreter verstehen diese Kleinbuchstaben nicht. Diejenigen aber, die sie verstehen, wandeln sie in ihrem Inneren in Großbuchstaben um. Wir entsprechen den üblichen Programmierprinzipien und fördern die Lesbarkeit der Programmzeilen auf dem Bildschirm, wenn wir in BASIC-Programmen Großbuchstaben verwenden.
Die zweite „Ungereimtheit" betrifft das unterschiedliche Verhalten der BASIC-Interpreter bei INPUT-Anweisungen. Die eine Art von Interpretern schreibt den Text zur INPUT-Anweisung und den eingegebenen Wert auf die nächste freie Zeile auf dem Bildschirm. Alle weiteren Eingaben, aber auch die mit PRINT angewiesenen Ausgaben, werden darunter gesetzt. Wenn der Bildschirm voll ist, dann wird zeilenweise nach oben abgerollt. Die andere Art von Interpretern verhält sich bei INPUT-Anweisungen vollkommen anders. Hier erscheint der Text zur INPUT-Anweisung auf der untersten Bildschirmzeile, und nach Abschluß der Eingabe des entsprechenden Wertes werden Text und Wert aus der unteren Bildschirmzeile gelöscht. Beide Varianten haben Vor- und Nachteile beim Aufbau einer übersichtlichen Bildschirmdarstellung. Um auch den letztgenannten Fall nicht unberücksichtigt zu lassen, werden in unseren BASIC-Programmen dort, wo es sinnvoll ist, die über INPUT eingegebenen Werte beim Aufbau der Bildschirmdarstellung über PRINT wieder ausgegeben. Sollte das bei Interpretern des ersten Typs in einigen Fällen zu „Schönheitsmängeln" führen, dann können diese durch Nutzung der Bildschirm-Löschanweisung CLS und einer eventuellen Umstellung von PRINT-Anweisungen mit Sicherheit beseitigt werden.
Da wir die Rechnungen (und ab und zu auch die Gedankengänge) von Archimedes, Kepler und Darwin nachvollziehen wollen, werden wir nicht immer alle klassischen Schritte der Erarbeitung von Rechenprogrammen abarbeiten. Manchmal sind die Aufgaben auch zu einfach dafür. Wir wollen diese Schritte hier kurz nennen.

1. Analyse der Aufgaben oder des Problems

Hier muß zunächst geklärt werden, ob überhaupt eine Lösung mit einem Computer möglich ist. Wir erinnern uns an die

Schule: Was ist gegeben? Was ist gesucht? Wie kommt man vom Gegebenen zum Gesuchten? Wenn ein Computer die Aufgabe lösen kann, dann wird der 2. Schritt in Angriff genommen.

2. Aufstellung eines vorteilhaften Algorithmus

Ein Lösungsweg ist dann günstig, wenn so genau und so schnell wie nötig gerechnet wird. Zur Lösung einer Aufgabe kann es mehrere Lösungsalgorithmen geben. Aber jeder Algorithmus darf nur Anweisungen enthalten, die der Computer auch ausführen kann. Dieser 2. Schritt ist erfolgreich abgeschlossen, wenn die mathematischen Gleichungen oder die verbale Beschreibung der Lösung auf dem Papier stehen.

3. Grafische Darstellung des Algorithmus

Bei umfangreichen Aufgabenstellungen hat es sich als vorteilhaft erwiesen, den Lösungsalgorithmus grafisch darzustellen. Damit wird die Bearbeitungsreihenfolge einschließlich der erforderlichen Verzweigungen besonders deutlich. Es gibt rund zehn solcher grafischer Darstellungsformen. Meist werden diese Programmablaufpläne (kurz PAP genannt) in Form von Flußdiagrammen oder als Struktogramme dargestellt. In ihnen steckt der zu Papier gebrachte menschliche Geist, also die meiste Arbeit. Das vergißt der Anfänger oft, der nur das Programmieren im Kopf hat und damit Gefahr läuft, den zweiten Schritt vor dem ersten tun zu wollen.

4. Umsetzung des PAP in ein Computerprogramm

Die wichtigsten Hilfsmittel hierzu sind Kenntnisse der Programmiersprache, Papier, Bleistift und Radiergummi. Das klingt genauso banal wie die Empfehlung, stets auf dem Papier eine Zeile für Einfügungen frei zu lassen. Der erfahrene Programmierer weiß aber, daß mit genialem Durchstreichen die Übersicht sehr schnell verlorengeht.

5. Eintasten und Testen des Programms

Nachdem das Programm eingetastet wurde, erfolgt der Start zum „Jungfernlauf" mit dem Kommando RUN. Mit riesengroßer Wahrscheinlichkeit wird dabei eine Fehlerausschrift erfolgen. Der Computer tut zwar das, was man ihm sagt, aber das kann sich sehr wohl von dem unterscheiden, was man beabsichtigt hat. Beim Programmieren ist der Zufall immer auf der Seite des versteckten Fehlers, zum Glück weisen die Interpreter auf eine Vielzahl der möglichen Fehler hin. Und Korrekturen sind beim Interpreterprinzip in BASIC leicht möglich. Ein Erfolgserlebnis stellt sich dann ein, wenn das Computerprogramm genau das tut, was es eigentlich tun sollte. Verharren Sie aber nicht zu lange in diesem Glückszustand, sondern absolvieren Sie möglichst schnell den letzten Schritt, denn eine Unterbrechung der Stromzufuhr oder ein versehentliches Auslösen des Kommandos NEW (Programm- und Datenlöschung) würde die ganze Arbeit zunichte machen.

6. Speichern und Dokumentieren des Programms

Mit dem Kommando SAVE oder CSAVE, gefolgt von einem Programmnamen, wird das Programm auf eine Magnetbandkassette ausgelagert und steht dort zur beliebigen Benutzung bereit. In Papierform werden der Programmname, der Programmablaufplan, Erläuterungen (z. B. Gültigkeitsgrenzen) und das korrigierte Programm aufgehoben. Überschätzen Sie dabei nicht Ihr Gedächtnis, in ein paar Monaten wissen Sie von diesem Programm so gut wie nichts mehr. Wer einen Drucker hat, kann sich das Programm natürlich auch ausdrucken lassen. Anderenfalls muß das Programm Zeile für Zeile auf dem Bildschirm mit dem LIST-Kommando überprüft werden. Und wer in seiner Ursprungsfassung mit Fehlerrekorden aufwarten konnte, der sollte ein völlig neues Abschreiben in Erwägung ziehen.
Wie schon erwähnt, werden wir nicht stets alle diese sechs Schritte durchlaufen.
Außerdem kannte ARCHIMEDES weder Papier (Erfindung 1. Jh. u. Z.) noch Bleistift (Produktion ab 1565). Ihm war auch, genau wie KEPLER, der Radiergummi (Erfindung Mitte 18. Jh.) noch unbekannt.

1.5. Wie speichern wir die erzeugten Grafiken?

Die Herstellung grafischer Darstellungen in BASIC und mit einem Kleincomputer kann zu einer zeitaufwendigen Angelegenheit werden. Manche Grafiken benötigen 30 Minuten oder mehr bis zu ihrer endgültigen Fertigstellung. Im Abschnitt „Kepler und die Spiralnebel" werden wir jeweils aus einer erzeugten Grafik eine neue herstellen. Wenn dazu mehrere hundert Bildpunkte neu berechnet und gesetzt werden müssen, so wird auch dieser Prozeß recht zeitaufwendig. Um so verständlicher ist der Wunsch, das grafische Ergebnis in einer geeigneten Form zu dokumentieren. Kleincomputer bieten dazu folgende Möglichkeiten:

1. Speicherung auf Magnetbandkassette

Genauso wie Programme und Daten auf einer Magnetbandkassette gespeichert werden können, bieten auch einige Kleincomputer die Möglichkeit, nur das Bildschirmbild auf die Magnetbandkassette auszulagern. In diesem Fall wird also nur der Speicherbereich, in dem sich der Bildwiederholspeicher befindet, abgespeichert. Das Programm und die Daten, die diese Grafik erzeugt haben, werden in diesem Fall nicht mit auf die Magnetbandkassette übernommen. Bei Bedarf kann dieser Bildinhalt wieder in den Bildwiederholspeicher des Computers eingelesen und damit auf dem Bildschirm dargestellt werden. Es handelt sich also um ein elektronisches Foto, das natürlich nur als feststehendes Bild gespeichert und wieder angeschaut werden kann.

2. Ausgabe auf einem Drucker

Falls zum Kleincomputer ein Drucker vorhanden ist, kann die erzeugte Grafik auch meist mit diesem Drucker zu Papier gebracht werden. Doch hier gilt es aufzupassen, denn einige der sogenannten grafikfähigen Matrixdrucker liefern zwar eine Kopie der einzelnen Bildschirmpunkte, die aber gestreckt auf dem Papier erscheinen. Das ist für die Lesbarkeit von Text sinnvoll, aber aus einem Kreis wird dann ein „Osterei". Oft führt auch die Druckqualität zu Enttäuschungen. Preiswerte Thermodrucker, die mit ihren aufgeheizten Nadeln dunkelbraune Punkte auf hellbraunem Wärmereaktionspapier erzeugen, lassen mit diesem kontrastarmen Bild viele Wünsche offen. Dazu kommt noch die begrenzte Haltbarkeit des Thermodrucks, wenn er zuviel Licht und Wärme abbekommt. Der Kontrast wird dann noch schwächer. Ideal sind natürlich leistungsfähige Drucker, die mit Normalpapier arbeiten. Diese sind aber meist teurer als der ganze Kleincomputer. Das sollte auch jeder bedenken, der mit solch einem Computer z. B. seine Korrespondenz erledigen will. So sollten Leistungsfähigkeit und Preis von Drucker und Computer wohl aufeinander abgestimmt sein. Da können Bildverarbeitungssysteme mit aufeinander abgestimmtem Computer, Monitor und Drucker für Hunderttausende Mark für uns kein Maßstab sein. Solche Druckergebnisse können uns bestenfalls zeigen, was im professionellen Bereich alles möglich ist. Wir erwähnten das ja schon bei der Betrachtung der Anzahl der verfügbaren Bildpunkte in Grafiksystemen.

3. Anfertigung von Bildschirmfotos

Die fotografische Kleinbildtechnik hat gegenwärtig einen hohen und ausgereiften Stand erreicht. Was liegt also näher, zumindest für Schwarzweiß-Aufnahmen, als diese preiswerte Technik für die Anfertigung von Bildschirmfotos zu nutzen. Uns kommt dabei entgegen, daß das eigentliche Arbeitsfeld des Computers, in dem Text und Grafik dargestellt wird, nur ein rechteckiger Teil der gesamten Bildschirmfläche ist. Damit werden Verzerrungs- und Schärfentiefeprobleme von vornherein gemildert. Für gute Bildschirmfotos von Computerdarstellungen möchten wir folgende Hinweise geben:

1. Es sollte möglichst ein kleines Fernsehgerät (Bildschirmdiagonale 31 cm) benutzt werden, um eine gute Bildschärfe zu erzielen. Das Bild muß wegen der relativ langen Belichtungszeit absolut ruhig stehen. Der Kontrast ist stark zu reduzieren. Damit erscheint das Bild auf dem Bildschirm zwar flau, die technisch bedingten Reflexionen an der rechten Seite der Zeichen und Bildpunkte werden damit aber auf ein Minimum reduziert. Das Fernsehgerät wird auf seiner Standfläche so angekippt, daß die Bildröhre rechtwinklig (nachmessen ist empfehlenswert) zur Tischplatte steht.
2. Es wird mit dem 50-mm-Normalobjektiv gearbeitet. Nachdem die Kleinbildkamera auf ein solides Stativ montiert wurde, wird der Abstand der Bildröhrenecken zur Filmebene gemessen, und gleiche Abstände werden hergestellt. Eine Spiegelreflexkamera mit vollautomatischer Belichtungssteuerung ist von Vorteil, anderenfalls sind Probeaufnahmen zu empfehlen.

3. Die Aufnahmen werden am besten bei völliger Dunkelheit angefertigt, um störende Reflexionen von vornherein auszuschalten und die Belichtungsautomatik nicht zu „verunsichern“. Die Kamera ist mit einem Schwarzweiß-Negativfilm mit einer Empfindlichkeit von 20 DIN oder 22 DIN geladen. Das Objektiv wird auf Blende 8 oder 11 abgeblendet. Bei diesen Werten bilden Schärfentiefe und Zeichnungsschärfe des Objektivs einen guten Kompromiß. Dann ergeben sich bei Aufnahmen von schwarzer Schrift auf weißem Grund Belichtungszeiten zwischen einer halben und einer Sekunde (Drahtauslöser verwenden). Das schaffen moderne Belichtungsautomatiken problemlos. Es sollte wegen der Konturenschärfe und der Ausgeglichenheit des Negativs eher zu knapp als zu lang belichtet werden.
4. Der Kleinbildfilm liefert nach normaler Entwicklung ausgeglichene, etwas flau erscheinende Negative. Das ist für den Positiv-Prozeß von Vorteil. Es wird Fotopapier mit harter oder extra harter Gradation eingesetzt. Eine exakte Belichtung mit vollständiger Ausentwicklung des Papiers liefert kontrastreiche Schwarzweiß-Bilder vom Bildschirm.

Bei längerem Arbeiten ist es empfehlenswert, die Schärfe am Fernsehgerät zu überprüfen, da diese bei Erwärmung mancher Geräte nachgeregelt werden muß. Ausgerüstet mit diesem Grundwissen wollen wir uns nun in das Computerabenteuer stürzen. Wer nicht abwarten kann und sofort am Computer beginnen möchte, sollte es mit der Archimedischen Spirale (S. 72) versuchen.
Ob Kepler oder Darwin uns wohl hätten folgen können? Wir wissen es nicht. Unsere Nachfahren werden aber über die Primitivität unserer Betrachtungen nur schmunzeln.

2. Archimedes von Syrakus (etwa 287 v. u. Z. bis 212 v. u. Z.)

2.1. Biographie

Der bedeutendste Mathematiker der hellenistischen Periode, vielleicht der größte Mathematiker aller Zeiten, wurde vermutlich 287 v. u. Z. geboren und lebte bis 212 v. u. Z. Über sein Leben ist weniges und Widersprüchliches überliefert, obwohl sein Freund HERAKLID bereits eine Biographie geschrieben hat. Leider ist diese Lebensbeschreibung verlorengegangen, aber sie muß existiert haben, weil lange Zeit die ARCHIMEDES-Biographie des HERAKLID zitiert und kommentiert worden ist.

Die Familie des ARCHIMEDES hatte ein bescheidenes, mittelständisches Auskommen. Der Vater PHIDIAS war ein in Syrakus und Sizilien bekannter und geachteter Astronom und Mathematiker. Der Sohn sollte den Beruf übernehmen und wurde vom Vater unterwiesen. Unter der Anleitung des Vaters befaßte sich ARCHIMEDES eingehend mit Mathematik und studierte die „Elemente" des EUKLID. In seinen späteren Abhandlungen verweist ARCHIMEDES oft auf die Schlußweisen des EUKLID. Neben der Mathematik muß sich ARCHIMEDES bereits in jungen Jahren mit Vorrichtungen, Maschinen und der Mechanik beschäftigt haben. Aber alles sprach dafür, daß ARCHIMEDES als Nachfolger seines Vaters Astronom, Berechner des Kalenders und Vorhersager von Mond- und Sonnenfinsternissen werden würde. Dann hat ein politisches Ereignis das Leben des ARCHIMEDES entscheidend verändert.

In den kriegerischen Auseinandersetzungen um Syrakus, belagert von den Truppen aus Rom und Karthago, hatte sich ein Verwandter der Familie mit Namen HIERON ausgezeichnet und war zum Herrscher über Syrakus geworden. Die Familie wurde dadurch aufgewertet, in ihrer Stellung und in ihren finanziellen Aufwendungen. Dadurch war es ARCHIMEDES möglich, seine Ausbildung außerhalb von Syrakus zu vervollständigen.

Bild 1. ARCHIMEDES

Im reifen Mannesalter, etwa um 250 v. u. Z., ging ARCHIMEDES nach Alexandria und studierte bei den Nachfolgern des EUKLID Mathematik. Zu dieser Zeit galt Alexandria als die Hauptstadt der Welt, das Zentrum der Mathematik, Astronomie und der Medizin. ARCHIMEDES trat im Museum von Alexandria, in dem alle Gelehrten arbeiteten und lebten, nicht sonderlich hervor, seine späteren Arbeiten beweisen aber, daß er die berühmte Bibliothek des Museums mit über 400000 Büchern gut genutzt haben muß. Als er nach Syrakus zurückgekehrt war, hat er seine neuartigen mathematischen Gedanken in einzelnen Abhandlungen niedergelegt, die er in Briefform an alexandrinische Freunde schickte. Die ersten Briefe gingen an KONON von Samos, gestorben etwa um 240 v. u. Z., später an DOSITHEUS (z. B. „Die Quadratur der Parabel", „Über Spiralen") und an ERATOSTHENES von Cyrene.

Als größte Leistung des ARCHIMEDES wird die „Mathematisierung“ der Mechanik bezeichnet. Die Abhandlung „Über den Hebel“ ist leider verschollen, und nur Teile davon aus eigenen Zitaten des ARCHIMEDES sind in anderen Werken bekannt geworden. Der Erfindungskunst des ARCHIMEDES schreibt man über vierzig mechanische Erfindungen zu. Allerdings sind uns nur wenige verbürgt überliefert. Die Archimedische Schraube, mit der Wasser zur Bewässerung nach oben befördert werden konnte, ist eine der bekanntesten Erfindungen, die selbst einen GALILEI begeistert hat. Weitere Erfindungen sind das Schneckengetriebe, der Flaschenzug und der Hohlspiegel. So gilt der größte Mathematiker auch als der größte Mechaniker und Begründer der Physik. Das Archimedische Prinzip, den Auftrieb betreffend, ist heute Schulstoff und in seiner Abhandlung „Über schwimmende Körper“ niedergelegt. Weitere Abhandlungen des ARCHIMEDES sind „Von der Ausmessung des Kreises“, „Über die Berechnung der Sandzahl“, die zeigt, daß es keine größte Zahl gibt, das „Stomachion“, die als Denksportaufgabe ein Legespiel behandelt, und, nicht überliefert, „Vom Gleichgewicht“ und „Von Prismen und Zylindern“.
Besondere Bedeutung für die ARCHIMEDES-Forschung haben die Abhandlungen „Über die Verfertigung einer Himmelssphäre“ und „Von der Kugel und dem Zylinder“. Über hundert Jahre nach dem Tod des ARCHIMEDES hat CICERO, der römische Politiker und Schriftsteller, eine nach den Vorschriften des ARCHIMEDES angefertigte Sphäre gesehen. Tiefbeeindruckt hat er beschlossen, das Grab des ARCHIMEDES in Syrakus auf Sizilien aufzusuchen. CICERO hat in seinem Buch „Gespräche im Tusculum“ geschrieben, daß ihm niemand Auskunft geben konnte über das Grab. Nach langem Suchen habe er dann eine Steinsäule mit der Zeichnung einer Kugel und eines Zylinders gefunden. Die Inschrift war schon zum Teil unleserlich. Die Syrakuser, die bei der Verteidigung ihrer Stadt ARCHIMEDES viel zu verdanken hatten, vergaßen ihn schnell. Bei der Plünderung der Stadt durch die siegreichen Römer wurde der in Gedanken versunkene ARCHIMEDES von römischen Soldaten erschlagen. Die Legende schreibt ihm die letzten Worte zu „Verwirre mir meine Kreise nicht“, mit denen er die römischen Soldaten von der Zerstörung seiner Zeichnungen im Sand abhalten wollte. Mehr als 2000 Jahre später denken wir darüber nach, was ARCHIMEDES wohl mit der elektronischen Rechentechnik

hatte erreichen können. Vielleicht würden wir ihn viel zu sehr stören, und er würde ausrufen: „Verwirre mir meine integrierten Schaltkreise nicht.“

2.2. Die Sandzahl oder des Archimedes Sandesrechnung

Die Abhandlungen des ARCHIMEDES verbinden „überraschende Originalität der Gedankenführung“ mit „großer Strenge der Beweise“ und „großer Meisterschaft der Rechentechnik“. Die „rechnerische Gewandtheit“ von ARCHIMEDES zeigt sich im „Rinderproblem“, das zu einer Gleichung führt, die nur mit sehr großen Zahlen lösbar ist. Mit großen Zahlen, die „unglaublich erscheinen“, arbeitete ARCHIMEDES auch, um die Anzahl der Sandkörner zu berechnen in einem Haufen von der Größe der Erde und der Welt (Ostwalds Klassiker der exakten Wissenschaften, Bd. 213):
„Etliche glauben, König GELON, daß die Zahl der Sandkörner unendlich sei. Ich spreche dabei nicht allein vom Sand um Syrakus und im übrigen Sizilien, sondern auch von dem Sande der ganzen bewohnten und unbewohnten Erde. Andere gibt es, die zwar nicht der Ansicht sind, daß die Zahl der Sandkörner unendlich sei, die aber meinen, daß es keine so große Zahl gäbe, die die Zahl der Sandkörner übertreffe. Es ist klar, daß die Vertreter dieser Ansicht, wenn sie sich eine Kugel aus Sand vorstellten, so groß wie die Erdkugel, nachdem in dieser die Meere und alle Vertiefungen bis zur Gipfelhöhe der höchsten Berge aufgefüllt wären, um so mehr der Ansicht wären, daß keine Zahl namhaft gemacht werden könne, die größer wäre als die Zahl der Sandkörner dieser Kugel. Ich aber werde versuchen, dir mit Hilfe von geometrischen Beweisen klarzumachen, daß unter den von uns in den Schriften an ZEUXIPPOS genannten Zahlen etliche vorhanden sind, die nicht nur die Zahl der Sandkörner in jener der Erdkugel gleichen Kugel, von der wir sprachen, übertreffen, sondern auch die Zahl der Sandkörner in einer Kugel, die so groß ist wie der Kosmos. Du bist darüber unterrichtet, daß von den meisten Astronomen als Kosmos die Kugel bezeichnet wird, deren Zentrum der Mittelpunkt der Erde und deren Radius die Verbindungslinie der Mittelpunkte der Erde und der Sonne ist.“ ARCHIMEDES beruft sich nun auf den Astronomen ARISTARCH von Samos. „Es wird nämlich angenommen,

daß die Fixsterne und die Sonne unbeweglich seien, die Erde sich um die Sonne, die in der Mitte der Erdbahn liege, in einem Kreis bewege. Der Durchmesser der Erde möge sich zum Durchmesser der Kugel, die von uns als Kosmos bezeichnet wird, genauso verhalten wie der Durchmesser des Kosmos zum Durchmesser der Fixsternkugel."

„Wir behaupten nun: Auch wenn wir uns eine Kugel aus Sand vorstellen, die so groß ist wie die von ARISTARCH angenommene Fixstern-Sphäre, so lassen sich von den von uns genannten Zahlen solche angeben, die so groß sind, daß sie die Zahl der Sandkörner in jener Kugel übertreffen."

ARCHIMEDES möchte also die Anzahl der kleinen feinen Sandkörner, die in eine Kugel passen, die so groß ist wie der Kosmos und die sogar so groß sein soll wie die Fixstern-Sphäre, berechnen und angeben. Zur Abschätzung der Kugeln, so groß wie der Kosmos und so groß wie die Fixstern-Sphäre, bedient sich ARCHIMEDES der damaligen Kenntnisse und führt die Messungen von Zeitgenossen sowie eigene Messungen an:

1. Durch ERATOSTHENES von Cyrene, der von 276 bis 195 v. u. Z. lebte, wurde der Erdumfang gemessen. In vielen Schriften wird die Legende überliefert, ERATOSTHENES wäre durch folgende Beobachtung zur Messung des Erdumfangs gekommen: Zum Sommersanfang spiegelt sich die Sonne in Syene in einem tiefen Brunnen. Gleichzeitig bildet sie in Alexandria, das auf dem gleichen Erdmeridian liegt, einen Winkel von $\alpha = 7\frac{1}{5}°$ mit dem Zenit. Die Entfernung E zwischen Syene und Alexandria verhält sich zum Erdumfang U wie $7\frac{1}{5}°$ zu $360°$.

$$\frac{U}{E} = \frac{360°}{7\frac{1}{5}°}$$

Die Entfernung E zwischen Syene und Alexandria wurde durch Bematisten, die Schrittzähler, ermittelt, und zwar als $E = 5000$ Stadien (1 Stadion $= 185$ m). Damit ist $U = 50\,E = 250000$ Stadien.

ARCHIMEDES geht darüber weit hinaus, indem er annimmt, der Erdumfang sei „nicht größer als" 300000 Stadien. Für die weiteren Rechnungen setzt er sogar voraus, der Umfang der Erde sei etwa 3000000 Stadien und „nicht größer".

2. Der Durchmesser des Mondes ist kleiner als der Durchmesser der Erde und dieser wiederum kleiner als der Durchmesser der Sonne.

3. Der Durchmesser der Sonne ist etwa 30mal so groß „wie der Durchmesser des Mondes und nicht größer, obwohl von den früheren Astronomen EUDOXUS als Multiplikator 9, mein Vater PHIDIAS 12 annimmt und ARISTARCH zu zeigen versucht, daß der Durchmesser der Sonne mehr als 18, aber weniger als 20mal so groß ist wie der Durchmesser des Mondes. Ich aber gehe auch über diesen hinaus und nehme an, um mich eines genügend großen Sicherheitskoeffizienten zu bedienen, daß der Durchmesser der Sonne etwa 30mal so groß ist wie der Durchmesser des Mondes und nicht größer." Diese Abschätzung von ARCHIMEDES ist allerdings viel zu niedrig, denn der Durchmesser der Sonne ist etwa 400mal so groß wie der Durchmesser des Mondes.

4. Der Durchmesser der Sonne ist größer „als die Seite des regelmäßigen Tausendecks, das dem größten Kreis des Kosmos eingeschrieben ist. Zu dieser Annahme gelange ich, da ARISTARCH gefunden hat, daß die Sonne unter der Größe von 1/720 des Tierkreises erscheint, und da ich ferner auch selbst versucht habe, auf solche Weise den Winkel zu messen, dessen Scheitel im Auge liegt und dessen Schenkel die Sonne berühren. Es ist nun recht schwierig, diese Messung genau auszuführen, weil weder die Augen, noch die Hände, noch die Instrumente, deren man hierzu bedarf, die genügende Sicherheit für diese Beobachtungen gewährleisten. Über diese Dinge scheint es mir gegenwärtig nicht an der Zeit, sich in lange Erörterungen einzulassen, zumal da solches schon oftmals veranschaulicht worden ist".

Es genügt ARCHIMEDES die Feststellung, daß der fragliche Winkel kleiner ist als der 164. Teil und größer ist als der 200. Teil eines rechten Winkels. Der mittlere Durchmesser D der Sonne liegt also zwischen

$$\frac{90°}{200} \leqq D \leqq \frac{90°}{164}$$

$$27' \leqq D \leqq 32{,}9'$$

Diese Abschätzung und Messung von ARCHIMEDES ist zutreffend, denn tatsächlich erscheint uns die Sonne unter einem Winkel von 32 Minuten. Man kann die Sonne also

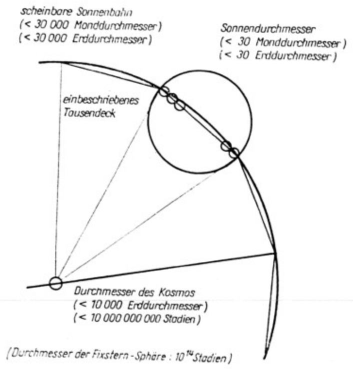


Bild 2. Größenvorstellungen des ARCHIMEDES

etwa 720mal auf einem größten Kreis auf ihrer Himmelsbahn aneinanderreihen (Bild 2). ARCHIMEDES überschreitet wieder diese Größenangabe, indem er voraussetzt, „daß der Durchmesser der Sonne größer ist als die Seite des der scheinbaren Sonnenbahn einbeschriebenen regelmäßigen Tausendecks".

Die Voraussetzungen von ARCHIMEDES werden nun anschaulich zusammengestellt (vgl. dazu Bild 2). Auf der scheinbaren Sonnenbahn können 1000 Sonnen angeordnet werden. Jede Sonne ist „nicht größer als" 30 Monddurchmesser, erst recht „nicht größer als" 30 Erddurchmesser. Demnach ist die Sonnenbahn „nicht größer als" $30 \cdot 1000 = 30000$ Erddurchmesser. ARCHIMEDES benutzt zur Berechnung des Durchmessers aus dem Umfang der kreisförmigen Sonnenbahn den Faktor 3, obwohl er die Zahl π schon sehr genau kannte (siehe S. 61). Der Durchmesser der scheinbaren Sonnenbahn ist demnach „nicht größer als" 10000 Erddurchmesser. Damit hat ARCHIMEDES die angestrebte Abschätzung: Der Durchmesser des Kosmos ist „nicht größer als" 10000 Erddurchmesser. Da er von ERATOSTHENES weiß, daß der Erddurchmesser „nicht größer" ist als 1000000 Stadien, ist der Durchmesser des Kosmos „nicht größer" als 10000000000 Stadien. Der Durchmesser der Fixstern-

Sphäre F soll sich nun zum Durchmesser des Kosmos K wie dieser sich zum Durchmesser der Erde E verhalten.

$$\frac{F}{K} = \frac{K}{E} \quad \text{oder} \quad F = \frac{K^2}{E}$$

Mit $K = 10^4 \cdot E$ erhält man also

$$F = \frac{(10^4 \cdot E)^2}{E} = 10^8 \cdot E = 10^8 \cdot 10^6 \text{ Stadien}$$
$$= 10^{14} \text{ Stadien}.$$

„Dies sind meine Voraussetzungen. Es ist nun wünschenswert, daß ich die Benennungen der Zahlen angebe, damit auch diejenigen, die mein Buch an ZEUXIPPOS nicht gelesen haben, nicht in Verlegenheit geraten, weil das in jenem Buch Erwähnte fehlte."

Die weitere Rechnung, die zur Anzahl der Sandkörner in der „Weltkugel" führen soll, läßt nun sehr große Zahlen erwarten. Die größte den Griechen bekannte Zahl war die Myriade, ein Ausdruck, der auch heute noch umgangssprachlich für eine große Menge benutzt wird. Eine Myriade war 10000 oder in Potenzschreibweise 10^4. Um zu großen Zahlen zu gelangen, beschreitet ARCHIMEDES folgenden Weg.

„Nun besitzen wir die Namen der Zahlen bis zu einer Myriade durch Überlieferung und zählen auch die Myriaden bis zu 10000 Myriaden. Um zu größeren Zahlen zu gelangen, betrachten wir 10000 Myriaden als „die Zahlen der ersten Ordnung". Von diesen Zahlen erster Ordnung wird die Zahl 10000 Myriaden als „Einheit der Zahlen zweiter Ordnung e_2" genannt. Setzen wir diese Einheit 10000 Myriaden Mal, so erhalten wir $10^4 \cdot 10^4 \cdot 10^8 = 10^{8 \cdot 2}$ als „Einheit der dritten Ordnung e_3". In derselben Weise würde sich 10000 Myriaden mal $10^{8 \cdot 2} = 10^8 \cdot 10^{8 \cdot 2} = 10^{8 \cdot 3} = e_4$ als „Einheit der vierten Ordnung" ergeben."

So wird weiter vorgeschritten bis zu den Zahlen 100000000ter Ordnung, in der Bezeichnung e mit dem Index 100000000.

„Es genügt nun, die Zahlen bis zu dieser Grenze zu kennen, man kann aber noch weiter gehen. Es seien nämlich die genannten Zahlen als „Zahlen erster Periode" bezeichnet. Die größte Zahl der ersten Periode werde die „Einheit der Zahlen erster Ordnung der zweiten Periode" genannt. Weiter werde das 100000000fache dieser Zahl die „Einheit der Zahlen zweiter Ordnung der zweiten Periode" genannt. In gleicher Weise werde die höchste Zahl zweiter Ordnung

Tabelle 1. Zahlensystem des Archimedes (Zahlen der ersten Periode)

1 Myriade	$=$	$10\,000 = 10^4$				
10000 Myriaden	$=$	$10000 \cdot 10000 = 10^4 \cdot 10^4 = 10^8$		$=$	1 Einheit der zweiten Ordnung	$= e_2$
$\vdots$						
$10e_2$	$=$	1 Dekade der Einheit zweiter Ordnung				
$100e_2$	$=$	1 Hekatontade der Einheit zweiter Ordnung				
$1\,000e_2$	$=$	1 Chiliade der Einheit zweiter Ordnung				
$10\,000e_2$	$=$	1 Myriade der Einheit zweiter Ordnung				
$\vdots$						
10000 Myriaden der zweiten Ordnung	$=$	$10^8 \cdot 10^8$	$= 10^{8 \cdot 2}$	$=$	1 Einheit der dritten Ordnung	$= e_3$
10000 Myriaden der dritten Ordnung	$=$	$10^8 \cdot 10^{8 \cdot 2}$	$= 10^{8 \cdot 3}$	$=$	1 Einheit der vierten Ordnung	$= e_4$
$\vdots$						
10000 Myriaden der siebenten Ordnung	$=$	$10^8 \cdot 10^{8 \cdot 6}$	$= 10^{8 \cdot 7}$	$=$	1 Einheit der achten Ordnung	$= e_8$
$\vdots$						
		1	$= 10^{8 \cdot 0}$	$=$	1 Einheit der ersten Ordnung	$= e_1$

der zweiten Periode zur „Einheit der Zahlen dritter Ordnung der zweiten Periode" genannt, und so schreitet man vor bis zu den Zahlen der 100000000ten Ordnung der zweiten Periode. Wiederum werde die höchste Zahl der zweiten Periode die „Einheit der Zahlen erster Ordnung der dritten Periode" genannt, und so schreitet man vor bis zu den Zahlen 100000000ter Ordnung der 100000000ten Periode" (Tabelle 1). In diese Tabelle des Zahlensystems von ARCHIMEDES mit den Zahlen der ersten Periode sind auch die Bezeichnungen für die Vielfache der Einheiten, als Beispiel der zweiten Ordnung, mit aufgenommen worden.

Das Zahlenbeispiel des ARCHIMEDES wäre uns sicherlich sympathischer, wenn nicht $10^4 = 1$ Myriade, sondern $10^3 = 1$ Tausend zugrunde liegen würde. Wenn die Griechen als größte Zahl $10^3 = 1$ Mylliade gekannt und benannt hätten, so hätten 10^3 Mylliaden zu $10^3 \cdot 10^3 = 10^6 = 1$ Million geführt, als Anschluß an unser vertrautes Zahlensystem. Aber auch in diesem Zahlensystem ist Aufmerksamkeit geboten, denn die Begriffe Billion, Trillion usw. werden in verschiedenen Ländern unterschiedlich benutzt. In der Sowjetunion, Frankreich, USA und Italien ist 1 Billion $= 1\,000$ Millionen $= 10^9$. In der DDR, BRD und Großbritannien dagegen bedeutet 1 Billion $= 1$ Million Millionen $= 10^{12}$. Diese Unterschiede sind historisch entstanden. Sie haben ihren Ursprung höchstwahrscheinlich darin, daß im Lateinischen „mille" $= 1\,000$ bedeutet, so daß im romanischen Sprachraum (zu dem seltsamerweise auch die UdSSR und die USA gehören) eine Staffelung im Vielfachen von $1\,000$ logisch erscheint, z. B. eine Million $= 1\,000 \times 1\,000$, eine Billion $= 1\,000$ Millionen. Im germanischen Sprachraum besteht diese enge begriffliche Bindung nicht, so daß die Staffelung im Vielfachen von einer Million vorgenommen wurde. Bei gedankenloser Übersetzung kann dies zu erheblichen Mißverständnissen führen, z. B. würde eine Billion Sekunden nach unserem Sprachgebrauch über 3000 Jahre dauern, nach dem der UdSSR nur drei Jahre. Die Anzahl der Erdbewohner würde in der DDR mit 4,5 Milliarden, in der UdSSR mit 4,5 Billionen angegeben.

Wir wollen uns nun wieder an das Vorhaben des ARCHIMEDES erinnern. „Über die Größen und Abstände setze ich also dieses voraus und über die Sandkörner folgendes: Die Sandkörner sollen nun so fein angenommen werden, daß 10000 erst die Größe eines Mohnkornes besitzen. Der Durchmesser eines Mohnkornes sei „nicht größer als" der 40. Teil einer Fingerbreite. Bei einem Versuch, den ich anstellte, legte ich auf ein glattes Lineal eine geradlinige Reihe einander berührender Mohnkörner und bemerkte, daß bereits 25 Mohnkörner eine Länge, die so groß ist wie die Fingerbreite, erfüllten. Indem ich nun den Durchmesser eines Mohnkorns noch geringer annehme, so setze ich voraus, daß der Mohnkorndurchmesser etwa der 40. Teil einer Fingerbreite ist und nicht geringer, indem ich auf diese Weise einen genügend großen Sicherheitskoeffizienten herstellen will, um meine Abschätzungen gegen jeden Widerspruch zu sichern."

„Eine Kugel, deren Durchmesser die Fingerbreite ist, kann mithin nicht mehr als $40 \cdot 40 \cdot 40 = 64000$ Mohnkörner oder 64000 Myriaden Sandkörner enthalten. Dies ist aber die Zahl $6\ e_2 + 40000000$, sie ist also kleiner als $10\ e_2$. Die Kugel aber von 100 Fingerbreiten Durchmesser $100 \cdot 100 \cdot 100 = 10^6$-mal so groß als die Kugel von einer Fingerbreite Durchmesser, denn die Inhalte von Kugeln verhalten sich wie die dritten Potenzen ihrer Durchmesser. Eine Sandkugel von 100 Fingerbreiten Durchmesser enthält also nicht mehr als 1000 Myriaden Einheiten der zweiten Ordnung, also $10^3 \cdot 10^4 e_2 = 10^6 \cdot 10 e_2 = 10^7 \cdot 10^{8 \cdot 1} = 10^{15}$ Sandkörner. Eine Kugel von $100 \cdot 100 = 10000$ Fingerbreit Durchmesser würde demnach 10^6-mal so viel Körner fassen wie eine Kugel von 100 Fingerbreit Durchmesser, das sind 10 Myriaden Einheiten dritter Ordnung, also $10 \cdot 10^4 \cdot 10^{8 \cdot 2} = 10^6 \cdot 10^{15} = 10^{21}$ Sandkörner. Weil aber ein Stadion kleiner ist als 10000 Fingerbreit, so erhellt, daß die Menge des Sandes in einer Kugel, deren Durchmesser ein Stadion beträgt, geringer ist als 10 Myriaden Einheiten der dritten Ordnung."

Damit ist Archimedes eine Abschätzung für die Anzahl der Sandkörner gelungen, die sich in einer Kugel von 1 Stadion Durchmesser höchstens befinden können. Die gleiche Schlußweise, Verhundertfachung des Kugeldurchmessers und Vermillionfachung der Sandkörneranzahl, wird nun immer weiter angewandt (Tabelle 2).

Der Durchmesser des Kosmos war „nicht größer als" 10^{10} Stadien. Eine Kugel vom Durchmesser des Kosmos enthält also 10^{51} Sandkörner. Die Fixsternkugel mit einem Durchmesser von 10^{14} Stadien enthält 10^{63} Sandkörner. Dieses Ergebnis hat Archimedes ohne Kenntnis der Potenzschreibweise vor mehr als 2000 Jahren erhalten, zu einer Zeit, als die Zahlen nur bis $10000 = 10^4$ eine Bezeichnung hatten. Zum besseren Verständnis für uns sind die Anzahl der feinen Sandkörner

Tabelle 2

Durchmesser der Kugel	Anzahl der Sandkörner
1 Stadion	$10 \cdot 10^4 \cdot 10^{8 \cdot 2} =$ 10 Myriaden Einheiten der dritten Ordnung $= 10^{21}$
10^2 Stadien	$10^6 \cdot 10 \cdot 10^4 \cdot 10^{8 \cdot 2} = 10^3 \cdot 10^{8 \cdot 3} =$ 1000 Einheiten der vierten Ordnung $= 10^{27}$
10^4 Stadien	$10^6 \cdot 10^3 \cdot 10^{8 \cdot 3} = 10 \cdot 10^{8 \cdot 4} =$ 10 Einheiten der fünften Ordnung $= 10^{33}$
10^6 Stadien	$10^6 \cdot 10 \cdot 10^{8 \cdot 4} = 10^3 \cdot 10^4 \cdot 10^{8 \cdot 4} =$ 1000 Myriaden Einheiten der fünften Ordnung $= 10^{39}$
10^8 Stadien	$10^6 \cdot 10^3 \cdot 10^4 \cdot 10^{8 \cdot 4} = 10 \cdot 10^4 \cdot 10^{8 \cdot 5} =$ 10 Myriaden Einheiten der sechsten Ordnung $= 10^{45}$
10^{10} Stadien	$10^6 \cdot 10 \cdot 10^4 \cdot 10^{8 \cdot 5} = 10^3 \cdot 10^{8 \cdot 6} =$ 1000 Einheiten der siebenten Ordnung $= 10^{51}$
10^{12} Stadien	$10^6 \cdot 10^3 \cdot 10^{8 \cdot 6} = 10 \cdot 10^{8 \cdot 7} =$ 10 Einheiten der achten Ordnung $= 10^{57}$
10^{14} Stadien	$10^6 \cdot 10 \cdot 10^{8 \cdot 7} = 10^3 \cdot 10^4 \cdot 10^{8 \cdot 7} =$ 1000 Myriaden Einheiten der achten Ordnung $= 10^{63}$

und die Rechengänge in Potenzschreibweise zu den Bezeichnungen und Formulierungen von ARCHIMEDES mit angegeben worden. Die Zahl 10^{63} ist immerhin eine 1 mit 63 Nullen. Für das Manuskript dieses Buches, mit der Schreibmaschine geschrieben, soll eine Zeile 60 Anschläge haben. Die Zahl könnte also nicht in einer Zeile geschrieben werden, so groß ist die Anzahl der Sandkörner in der Fixsternkugel des ARISTARCH.
ARCHIMEDES beendet seine Betrachtung: „Ich glaube, König GELON, daß dies der Menge der nicht mathematisch gebildeten Menschen unglaublich erscheinen wird, den mathematisch gebildeten Menschen, die über die Abstände und die Größenverhältnisse der Erde, der Sonne, des Mondes und des ganzen Weltalls nachgedacht haben, aber keineswegs. Deshalb glaubte ich, daß es auch dir wünschenswert sein würde, dies zu erkennen.“

Zum Abschluß eine Rechnung in „griechisch“:

Wieviel Lichttage sind 1 Hekatontade Myriaden e_2 Stadien (1 Stadion = 185 m; 1 Tag = $60 \cdot 60 \cdot 24$ s = 86400 s)?
1 Hekatontade Myriaden e_2 Stadien = $100 \cdot 10^4 \cdot 10^{8 \cdot 1}$ Stadien = 10^{14} Stadien = $0{,}185 \cdot 10^{14}$ km.

Die Lichtgeschwindigkeit beträgt $v = \frac{s}{t} \approx 3 \cdot 10^5\ \mathrm{km\ s^{-1}}$, d. h., das Licht legt in 1 s etwa 300000 km zurück. Für $0{,}185 \cdot 10^{14}$ km benötigt das Licht einige Tage, nämlich

$$t = \frac{s}{v} = \frac{0{,}185 \cdot 10^{14}\ \mathrm{km}}{3 \cdot 10^5\ \mathrm{km\ s^{-1}} \cdot 86400\ \mathrm{s\ d^{-1}}} = 2 \cdot 357\ \mathrm{d}$$
$$= 2 \cdot 357\ \text{Lichttage}$$

Wir hatten vorhin schon gezeigt, daß ARCHIMEDES bei der Berechnung des Durchmessers der Fixstern-Sphäre 10^{14} Stadien ermittelt hat, woraus sich ein Durchmesser von knapp 2 Lichtjahren ergibt. Damit hat ARCHIMEDES für den Radius der Fixstern-Sphäre (Faktor 3) nicht einmal 1 Lichtjahr angenommen, demnach eine viel zu kleine Welt betrachtet. Die nächste Sonne ist ungefähr 4,3 Lichtjahre von der Erde entfernt. Über allen Stadien, Myriaden und Hekatontaden haben wir ganz den Computer vergessen. Die meisten BASIC-Interpreter hätten uns hier auch zu schaffen gemacht, da sie nur Zahlen bis etwa 10^{38} verarbeiten und von den „Einheiten der Zahlen dritter Ordnung der zweiten Periode“ genauso überrascht gewesen wären wie wir.

„Da ich gehört habe, daß KONON gestorben ist, der mir immer seine herzliche Freundschaft bewiesen hat, daß du aber KONONS vertrauter Freund und ein erfahrener Mathematiker seiest, trauerte ich um den Verstorbenen als um einen Freund und einen bewundernswerten Mathematiker, und beschloß, dir die Untersuchung über ein Problem, die ich eigentlich KONON übersenden wollte, zuzustellen, ein Problem nämlich, das bisher noch nicht, jetzt aber durch mich in Angriff genommen worden ist; und zwar habe ich die Lösung des Problems zuerst durch Methoden der Mechanik gefunden, alsdann durch Methoden der reinen Geometrie. Von den Forschern, die sich früher mit Geometrie beschäftigten, versuchten einige zu zeigen, daß es möglich ist, eine geradlinig begrenzte Fläche zu konstruieren, die einem gegebenen Kreise oder einem gegebenen Kreissegment flächengleich ist. Alsdann versuchten sie das gleiche zu zeigen für ein Ellipsensegment, machten dabei aber von Hilfssätzen, deren Richtigkeit keineswegs feststeht, Gebrauch. Daher erkannten die meisten an, daß diese Probleme nicht gelöst seien. Daß aber je ein Mathematiker versucht hätte, die Fläche eines Parabelsegments zu quadrieren, wie es mir gelungen ist, ist mir nicht bekannt.“
So beginnt der Brief, den ARCHIMEDES an DOSITHEUS schreibt und den er seinen Gedanken und Beweisen über „Die Quadratur der Parabel“ voranstellt. „Ich zeige nämlich, daß der Inhalt jedes Parabelsegments um ein Drittel größer ist als das Dreieck, das mit ihm gleiche Grundlinie und Höhe hat.“ Selbstbewußt beendet ARCHIMEDES seinen Brief: „Ich habe nun die Beweise niedergeschrieben und schicke dir zunächst die auf mechanischer Grundlage, dann die auf geometrischer Grundlage aufgebauten Beweise. Vorausgeschickt sind gewisse elementare Sätze aus der Geometrie der Kegelschnitte, die zum Beweise notwendig sind. Lebe wohl.“
Es lohnt sich, die Gedankengänge des ARCHIMEDES nachzuvollziehen und an geeigneter Stelle den Rechner zu bemühen, ohne alle Hilfssätze einzubeziehen, die ARCHIMEDES als „zweifelsfrei“ bewiesen hat. Bevor wir dem Gedankengang von ARCHIMEDES folgen, wollen wir einige mathematische Vorbereitungen treffen. Diese Vorbereitungen gehören heute zur Schulmathematik. Die jeweils angegebenen Zahlen-

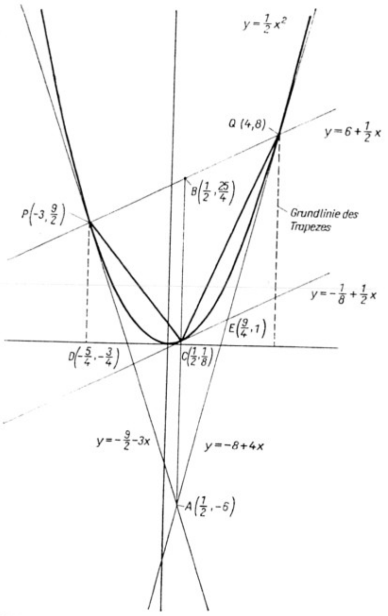


Bild 3. Parabelsegment mit einem eingeschlossenen Dreieck

beispiele beziehen sich auf Bild 3, das die Grundlage der Betrachtungen bildet.

1. Es soll die Gleichung einer Geraden aufgestellt werden, wenn zwei Punkte (x_1, y_1) und (x_2, y_2) auf der Geraden gegeben sind. Nach der Zwei-Punkte-Gleichung erhält man

$$\frac{y-y_1}{x-x_1}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$$

$$y=\left(y_1-x_1\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}\right)+\left(\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}\right)x=a+bx$$

Zahlenbeispiel:

$$P\left(-3,\frac{9}{2}\right),\quad Q\,(4,8)\Rightarrow a=6,\quad b=\frac{1}{2}$$

$$y=6+\frac{1}{2}x$$

2. Es soll die Geradengleichung aufgestellt werden, wenn ein Punkt (x_1, y_1) und der Anstieg b der Geraden gegeben sind. Nach der Punkt-Richtungs-Gleichung erhält man

$$y-y_1=b\,(x-x_1)$$

$$y=(y_1-bx_1)+bx=a+bx$$

Zahlenbeispiele:

$$P\left(-3,\frac{9}{2}\right),\quad b=-3\Rightarrow a=-\frac{9}{2}$$

$$y=-\frac{9}{2}-3x$$

$$Q\,(4,8),\quad b=4\Rightarrow a=-8$$

$$y=-8+4x$$

3. Es soll der Schnittpunkt S zweier Geraden $y_1=a_1+b_1x_1$ und $y_2=a_2+b_2x_2$ berechnet werden. Nach dem Gleichsetzungsverfahren ist

$$y_1=y_2=y_S$$

$$a_1+b_1x_S=a_2+b_2x_S$$

$$x_S=\frac{a_1-a_2}{b_2-b_1}$$

$$y_S=a_1+b_1x_S$$

Zahlenbeispiele:

$$y=-\frac{9}{2}-3x\Rightarrow x_S=\frac{1}{2},\quad y_S=-6$$

$$y=-8+4x\qquad S\left(\frac{1}{2},-6\right)$$

$$y=-\frac{9}{2}-3x\Rightarrow x_S=-\frac{5}{4},\quad y_S=-\frac{3}{4}$$

$$y=-\frac{1}{8}+\frac{1}{2}x\qquad S\left(-\frac{5}{4},-\frac{3}{4}\right)$$

$$y=-8+4x\Rightarrow x_S=\frac{9}{4},\quad y_S=1$$

$$y=-\frac{1}{8}+\frac{1}{2}x\qquad S\left(\frac{9}{4},1\right)$$

4. Es soll die Strecke zwischen zwei Punkten (x_1, y_1) und (x_2, y_2) halbiert werden. Der Abszissen- und Ordinatenwert des Halbierungspunkts H ergibt sich aus dem arithmetischen Mittelwert der Abszissen- bzw. Ordinatenwerte der beiden Punkte.

$$x_H = \frac{x_1 + x_2}{2}$$

$$y_H = \frac{y_1 + y_2}{2}, \quad H(x_H, y_H)$$

Zahlenbeispiel:

$$P\left(-3, \frac{9}{2}\right), \quad Q(4, 8) \Rightarrow x_H = \frac{1}{2}, \quad y_H = \frac{25}{4}$$

$$H\left(\frac{1}{2}, \frac{25}{4}\right)$$

5. Es soll die Fläche des Dreiecks berechnet werden, das durch die drei Punkte (x_1, y_1), (x_2, y_2) und (x_3, y_3) bestimmt ist. Die Dreiecksfläche A ist

$$A = \frac{1}{2}\left[x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)\right]$$

Zahlenbeispiele:

$$P\left(3, \frac{9}{2}\right), \quad Q(4, 8), \quad A\left(\frac{1}{2}, -6\right) \Rightarrow A = \frac{343}{8}$$

$$P\left(-3, \frac{9}{2}\right), \quad Q(4, 8), \quad C\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{8}\right) \Rightarrow A = \frac{1}{2} \cdot \frac{343}{8}$$

6. Es soll der Abstand zwischen zwei Punkten (x_1, y_1) und (x_2, y_2) berechnet werden. Es entsteht ein rechtwinkliges Dreieck, dessen Hypotenuse die Verbindungsgerade zwischen den beiden Punkten ist. Die Katheten sind jeweils die Parallelen zur x- und y-Achse des Koordinatensystems durch diese Punkte. Nach dem Lehrsatz des PYTHAGORAS ist die Entfernung R zwischen den beiden Punkten

$$R = \sqrt{(y_2 - y_1)^2 + (x_2 - x_1)^2}$$

Zahlenbeispiele:

$$P\left(-3, \frac{9}{2}\right), \quad Q(4, 8) \Rightarrow R = \frac{7}{2}\sqrt{5}$$

$$B\left(\frac{1}{2}, \frac{25}{4}\right), \quad Q(4, 8) \Rightarrow R = \frac{1}{2} \cdot \frac{7}{2}\sqrt{5}$$

Nach diesen Vorbetrachtungen kehren wir nun zu ARCHIMEDES zurück. Wir gehen von der Parabel $y = \frac{1}{2}x^2$ aus. Von dieser Parabel wird durch die Parabelsehne PQ ein Stück abgeschnitten (Bild 3). Es soll nun der Inhalt der Fläche berechnet werden, die durch die Parabel und die Sehne PQ begrenzt wird. Diese Fläche wird als Parabelsegment PQ bezeichnet. Die Quadratur der Parabel nach ARCHIMEDES bedeutet also, die Fläche eines Parabelsegments zu berechnen.

Die Parabelsehne wird durch die Punkte $P\left(-3, \frac{9}{2}\right)$ und $Q(4,8)$ gegeben. Die beiden Punkte P und Q liegen auf der Parabel. Es müssen nun die Gleichungen für die Tangenten durch diese beiden Punkte an die Parabel aufgestellt werden. Den Anstieg einer Tangente erhält man durch den Wert der 1. Ableitung in diesem Punkt. Aus $y = \frac{1}{2}x^2$ folgt $y' = x$, d. h., der Anstieg b entspricht dem x-Wert des betrachteten Punktes. (Das Beispiel ist so gewählt worden.)

$$P\left(-3, \frac{9}{2}\right) \quad Q(4, 8)$$

$$b = -3 \qquad b = 4$$

Der Schnittpunkt A der beiden Tangenten ist

$$A\left(\frac{1}{2}, -6\right).$$

Der Punkt B halbiert die Strecke PQ, D halbiert AP, E halbiert AQ und C halbiert AB. Die Gerade $y = -\frac{1}{8} + \frac{1}{2}x$ ist eine Parallele zur Sekante und eine Tangente an die Parabel im Punkt C. Mit den bereits angegebenen Gleichungen lassen sich die Werte, die in Bild 2 angegeben sind, nachvollziehen und kontrollieren.

ARCHIMEDES behauptet und beweist folgenden Satz (Ostwalds Klassiker der exakten Wissenschaften, Bd. 203): „Der Inhalt eines Parabelsegments ist 4/3 des Inhalts des Dreiecks, das mit ihm gleiche Grundlinie und Höhe hat.“

Die Fläche des Parabelsegments kann mit Hilfe der Integralrechnung berechnet werden. Man kann die Simpsonsche Näherungsformel (siehe Abschnitt: KEPLER und die Faßregel) dazu benutzen. Das bestimmte Integral A_P ist aber leicht elementar lösbar. Man erhält die Fläche des Parabelsegments, wenn man von der Fläche des Trapezes A_T, aufgespannt durch PQ über der x-Achse, die Fläche unter der Parabel A_P abzieht. Die Trapezfläche ist

$$A_T = 7 \cdot \frac{1}{2}\left(\frac{9}{2} + 8\right) = \frac{175}{4}$$

Die Fläche A_P, die zwischen der Parabel und der x-Achse liegt, ist

$$A_P = \int_{-3}^{4} \frac{1}{2} x^2 \,\mathrm{d}x = \frac{x^3}{6}\Big|_{-3}^{4} = \frac{64 + 27}{6} = \frac{91}{6}$$

Damit wird die Fläche des Parabelsegments PQ

$$A_{PS} = A_T - A_P \quad (PS \text{ Parabelsegment})$$

$$= \frac{175}{4} - \frac{91}{6} = \frac{2}{3} \cdot \frac{343}{8}$$

Die Fläche des Dreiecks $\triangle PCQ$ ist bereits berechnet worden.

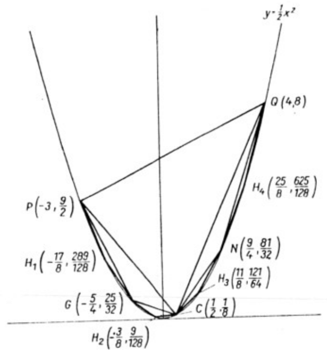
$$PCQ = \frac{1}{2} \cdot \frac{343}{8}$$

Das Zahlenbeispiel bestätigt die Behauptung von Archimedes:

$$A_{PS} = \frac{4}{3} \triangle PCQ$$

Archimedes beweist die Behauptung natürlich allgemein, für alle Parabelsegmente. Die Methode, die er dazu benutzt, wird meist als Exhaustionsmethode bezeichnet.
Der erste Näherungswert für das Parabelsegment ist die Dreiecksfläche $\triangle PCQ$. Die Punkte P und Q sind gegeben. Der Punkt C wird folgendermaßen gefunden: Die Strecke PQ wird halbiert, und der Halbierungspunkt B wird berechnet. Der Schnittpunkt einer Parallelen zur y-Achse durch den Punkt B mit der Parabel ist der Punkt C. (Für Mathematiker: Die Verbindungslinie DB ist der zur Richtung PQ konjugierte Durchmesser der Parabel und eine Parallele zur Parabelachse, im Beispiel stets Parallele zur y-Achse.) Wenn man den x-Wert des Halbierungspunkts B in die Parabelgleichung einsetzt, erhält man sofort den y-Wert des Punkts C, nämlich

$$y = \frac{1}{2} x^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{8}$$



1. Näherungswert: $F_{PS1} = \triangle PCQ$
2. Näherungswert: $F_{PS2} = \triangle PCQ + \triangle PGC + \triangle CNQ$
3. Näherungswert: $F_{PS3} = \triangle PCQ + \triangle PGC + \triangle CNQ + \triangle PH_1G + \triangle GH_2C + \triangle CH_3N + \triangle NH_4Q$

Bild 4. Teildreiecke nach der Exhaustionsmethode

Nun kann die Dreiecksfläche $\triangle PCQ$ berechnet werden.
Im zweiten Schritt werden die gleichen Betrachtungen auf die Parabelsegmente angewendet, die durch die Sekanten PC und QC gegeben sind. Dieses Vorgehen zeigt Bild 4:

1. Halbierung der Strecke PC, x-Wert des Halbierungspunkts in Parabelgleichung einsetzen, Berechnung des y-Werts, damit Koordinaten des Punkts G, Berechnung der Dreiecksfläche $\triangle PGC$.
2. Halbierung der Strecke QC, x-Wert des Halbierungspunkts in Parabelgleichung einsetzen, Berechnung des y-Werts, damit Koordinaten des Punkts N, Berechnung der Dreiecksfläche $\triangle CNQ$.

Der zweite Näherungswert für die Fläche des Parabelsegments PQ ist

$$A_{PS2} = \triangle PCQ + \triangle PGC + \triangle CNQ$$

Vor dem nächsten Schritt sind jeweils die zur Berechnung der Dreiecksflächen herangezogenen Punkte zu ordnen. Alle Dreieckspunkte der vorangehenden Berechnung werden nach der Größe ihres Abszissenwerts geordnet. Die so geordneten Punkte, die zur Berechnung des dritten Näherungswerts benutzt werden, sind

$$P\left(-3,\ \frac{9}{2}\right),\quad G\left(-\frac{5}{4},\ \frac{25}{32}\right),\quad C\left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{8}\right),$$

$$N\left(\frac{9}{4},\ \frac{81}{32}\right),\quad Q\,(4,8)\quad \text{(Bild 4)}$$

Nun folgen wieder die Operationen, und zwar viermal:

Halbierung der Strecke zwischen zwei aufeinanderfolgenden Punkten, x_H-Wert des Halbierungspunkts H_i in die Parabelgleichung einsetzen, Berechnung des y-Werts von H_i, Berechnung der Dreiecksfläche.

Der dritte Näherungswert für die Fläche des Parabelsegments ist

$$A_{PS3} = \triangle PCQ + \triangle PGC + \triangle CNQ + \triangle PH_1G + \triangle GH_2C + \triangle CH_3N + NH_4Q$$

Alle berechneten Ordinaten, Dreiecksflächen und Näherungswerte sind in Bild 4 und in Tabelle 3 aufgeführt.

Wir wollen nun den Computer bemühen, um die Gedanken von ARCHIMEDES nachzuvollziehen. Aus dem Wort „nachvollziehen" wird schon deutlich, daß wir das Werkzeug oder Denkzeug Computer als schnellen und genauen Rechner, nicht aber als eine „Kreativitätsmaschine" nutzen wollen und können. Als „kreatives Gerät" ist er bedingt für die Erzeugung von farbigen Mustern, Melodien, Texten und als Spielpartner (z. B. Schach) geeignet (siehe auch: GUTZER, H.: Das kann der Mikrocomputer. – Leipzig: Urania-Verlag, 1986). Das entsprechende BASIC-Programm zur Exhaustionsmethode zeigt Programm 1. Das Programm ist so aufgebaut, daß bis zur 4. Näherung gerechnet wird. Damit bekommen wir den Tabellenkopf, die Flächen der 15 Teildreiecke und die jeweiligen Flächensummen auf dem Bildschirm unter. Mit einigen Programmänderungen können natürlich auch weitere Näherungen berechnet werden. Nach der Reservierung von Datenplätzen für die x,y-Koordinaten und für die Dreiecksflächen in Programmzeile 20 werden in den Zeilen 30 bis 90 die erforderlichen Eingaben realisiert. Bei BASIC-Interpretern, die den Inhalt der INPUT-Anweisungen in fortlaufender Reihenfolge auf den Bildschirm schreiben, können die PRINT-Anweisungen in den Zeilen 50,

Tabelle 3. Ergebnisse zur Exhaustionsmethode

ΔPCQ	$\frac{1}{2}\cdot\frac{343}{8}$		
	$\frac{1}{2}\cdot\frac{343}{8}$	21,4375	A_{PS1}
ΔPGC	$\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{343}{8}$	2,6797	
ΔCNQ	$\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{343}{8}$	2,6797	
	$\frac{5}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{343}{8}$	26,7969	A_{PS2}
ΔPH_1G	$\frac{1}{64}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{343}{8}$	0,3350	
ΔGH_2C	$\frac{1}{64}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{343}{8}$	0,3350	
ΔCH_3N	$\frac{1}{64}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{343}{8}$	0,3350	
ΔNH_4Q	$\frac{1}{64}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{343}{8}$	0,3350	
	$\frac{21}{16}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{343}{8}$	28,167	A_{PS3}
⋮	⋮	⋮	
$\frac{4}{3}\Delta PQC$	$\frac{4}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{343}{8}$	28,5833	A_{PS}

80 und 90 weggelassen werden. Zunächst sind für die Parabel $Y = U \cdot X^2 + V$ die Konstanten U und V einzugeben. Damit legen wir fest, daß die Achse der Parabel stets parallel zur y-Achse des Koordinatensystems liegt. „Schräg" im Koordinatensystem liegende Parabeln müßten also erst noch entsprechend gedreht werden. Natürlich wäre auch hierfür ein Rechenprogramm denkbar.

Anschließend werden die Koordinaten von zwei Punkten auf der Fläche eingegeben. In den Zeilen 110 und 120 werden An-

```
 10 REM EXHAUSTIONSMETHODE
 20 DIM X(17): DIM Y(17): DIM F
(15)
 30 PRINT "KONSTANTEN FUER PARA
BELGLEICHUNG"
 40 PRINT "Y=U*X↑2+V EINGEBEN"
 50 INPUT "U=";U: INPUT "V=";V:
PRINT "U= ";U;"  V= ";V
 60 PRINT "KOORDINATEN DER BEID
EN PUNKTE"
 70 PRINT "EINGEBEN"
 80 INPUT "X1=";X1: INPUT "Y1="
;Y1: PRINT "X1= ";X1;" Y1= ";Y1
 90 INPUT "X2=";X2: INPUT "Y2="
;Y2: PRINT "X2= ";X2," Y2= ";Y2
 100 REM ZWEI-PUNKTE-GLEICHUNG
 110 LET A=Y1-X1*(Y2-Y1)/(X2-X1)
 120 LET B=(Y2-Y1)/(X2-X1)
 130 REM SCHNITTPUNKTE
 140 LET X(1)=B/(2*U)-SQR ((-B/(
2*U))*(-B/(2*U))-(V-A)/U)
 150 LET Y(1)=A+B*X(1)
 160 LET X(2)=B/(2*U)+SQR ((-B/(
2*U))*(-B/(2*U))-(V-A)/U)
 170 LET Y(2)=A+B*X(2)
 180 LET I=1: LET NA=0: LET FL=0
: LET HA=3
 190 REM BERECHNUNGSSCHLEIFE
 200 FOR K=1 TO 2↑NA
 210 LET HX=(X(I)+X(I+1))/2: LET
HY=(Y(I)+Y(I+1))/2
 220 LET X(HA)=HX: LET Y(HA)=U*H
X*HX+V
 230 GO SUB 500
 240 LET FL=FL+1
 250 LET F(FL)=.5*(X(I)*(Y(I+1)-
Y(I+2))+X(I+1)*(Y(I+2)-Y(I))+X(I
+2)*(Y(I)-Y(I+1)))
 260 LET I=I+2: LET HA=HA+1
 270 NEXT K
 280 IF NA<3 THEN LET I=1: LET N
A=NA+1: GO TO 200
 290 REM BILDSCHIRMAUSGABE
 300 CLS : DEF FN P(X)=LEN (STR$
(INT (X))): DEF FN R(X)=INT (X*
1000+.5)/1000
 310 PRINT "NR.  1.Naeh 2.Naeh 3
.Naeh 4.Naeh"
 320 FOR I=0 TO 31: PRINT AT 1,I
;"-": PRINT AT 17,I;"-": NEXT I
 330 FOR I=2 TO 16: PRINT AT I,2
-FN P(I-1);I-1: NEXT I
 340 PRINT AT 18,0;"SUM-": PRINT
AT 19,0;"MEN:"
 350 PRINT AT 2,7-FN P(F(1));FN
R(F(1))
 360 PRINT AT 19,7-FN P(F(1));FN
R(F(1))
 370 LET EX=2: LET SP=14: LET SU
=0
 380 FOR I=1 TO (2↑EX)-1
 390 PRINT AT I+1,SP-FN P(F(I));
FN R(F(I))
 400 LET SU=SU+F(I)
 410 NEXT I
 420 PRINT AT 19,SP-FN P(SU);FN
R(SU)
 430 IF EX=4 THEN GO TO 450
 440 LET EX=EX+1: LET SP=SP+7: L
ET SU=0: GO TO 380
 450 PRINT AT 21,0;"Exakter Wert
= ";F(1)*4/3: STOP
 500 REM UP SORTIERUNG
 510 FOR M=2 TO HA
 520 IF X(M-1)<=X(M) THEN GO TO
590
 530 FOR N=1 TO M-1
 540 IF X(M-N)<=X(M+1-N) THEN GO
TO 590
 550 LET ZX=X(M+1-N): LET ZY=Y(M
+1-N)
 560 LET X(M+1-N)=X(M-N): LET Y(
M+1-N)=Y(M-N)
 570 LET X(M-N)=ZX: LET Y(M-N)=Z
Y
 580 NEXT N
 590 NEXT M
 600 RETURN
```

BASIC-Programm 1. EXHAUSTIONSMETHODE →

stieg und absolutes Glied der Geraden bestimmt, die diese beiden Punkte schneidet. Durch Gleichsetzung von Geraden- und Parabelgleichung in den Programmzeilen 140 bis 170 ermitteln wir die Koordinaten der Schnittpunkte. Das entspricht den Punkten P und Q in Bild 3. Die Berechnung sämtlicher Dreiecksflächen wird in den Programmzeilen 200 bis 280 erledigt. In der Zeile 210 werden die Koordinaten des jeweiligen Halbierungspunkts berechnet. Daraus ergeben sich in Zeile 220 die Koordinaten des neuen Punkts auf der Parabel. Bei der ersten Näherung ist dies der Punkt C in Bild 3. In Zeile 230 wird zu einem Unterprogramm gesprungen, das die Sortierung der vorhandenen Punkte auf der Parabel nach aufsteigenden x-Werten vornimmt. Dieses Sortierprogramm umfaßt die Programmzeilen 500 bis 600. Wenn der Computer aus dem Unterprogramm zurückkehrt, wird in Zeile 240 die laufende Nummer der Fläche des entsprechenden Teildreiecks festgelegt. Da wir nur bis zur 4. Näherung rechnen wollen, werden die Flächen von insgesamt 15 Teildreiecken ermittelt. Die Gleichung zur Flächenberechnung eines Dreiecks enthält die Programmzeile 250. Die Aufsummationen der Variablen I und HA in Zeile 260 sind sehr wichtig, um eine exakte Ermittlung der Flächen aller Teildreiecke unter Zugrundelegung der richtigen Punkte zu gewährleisten.

Die Bildschirmausgabe der Ergebnisse wird in den Programmzeilen 300 bis 450 organisiert und ist damit recht umfangreich. In Zeile 300 wird zunächst der Bildschirm gelöscht. Weiterhin werden die Funktionen P(X) und R(X) definiert. Die Funktion P(X) bestimmt die Anzahl der Vorkommastellen eines Ergebnisses und ermöglicht damit eine kommabündige Darstellung auf dem Bildschirm. Die Funktion R(X) erledigt das Runden auf 3 Stellen nach dem Komma. Komfortable BASIC-Interpreter bieten die PRINT-USING-

Anweisung, mit der diese beiden Funktionen P(X) und R(X) überflüssig werden.
Die Herstellung von Strichen auf dem Bildschirm wird in der Programmzeile 320 durchgeführt. Mit einem Interpreter, der die STRING$-Anweisung bietet, ist dies einfacher zu bewältigen. Die Zeile 330 realisiert die Anzeige der laufenden Nummern 1 bis 15 auf dem Bildschirm. Hier sei nochmals daran erinnert, daß je nach BASIC-Interpreter die Zeilen- und Spaltenzahl der PRINT AT-Anweisung mit oder ohne Klammern einzugeben ist. Manche Interpreter reservieren auch bei Zahlenausgaben grundsätzlich eine Vorzeichenstelle. In solch einem Fall wäre dann in Zeile 330...PRINT AT(I, 3-FN P(I-1:... zu schreiben. In den Programmzeilen 350 bis 410 werden dann die Flächeninhalte der Teildreiecke in übersichtlicher Form auf dem Bildschirm angezeigt. Zeile 420 gibt die Flächensumme der 2. bis 4. Näherung aus. Die Zeilen 430 und 440 organisieren den exakten Ablauf und den Abbruch der Ausgabe. Das Programm endet mit Zeile 450, in der „laut ARCHIMEDES" der exakte Wert angegeben wird. Die Bildschirmdarstellung für unser Berechnungsbeispiel enthält das Bild 5.
Nun wieder zurück zum „mathematischen Hintergrund". Die Näherungswerte A_{PS2}, A_{PS3}, ... legen die Vermutung nahe, daß die Summanden aller Näherungswerte mit dem ersten

NR.	1.Naeh	2.Naeh	3.Naeh	4.Naeh
1	21.437	21.437	21.437	21.437
2		2.68	2.68	2.68
3		2.68	2.68	2.68
4			0.335	0.335
5			0.335	0.335
6			0.335	0.335
7			0.335	0.335
8				.042
9				.042
10				.042
11				.042
12				.042
13				.042
14				.042
15				.042
SUM-MEN:	21.437	26.797	28.137	28.4[illegible]

Exakter Wert= 28.583333

K

Bild 5. Berechnungsergebnis nach der Exhaustionsmethode

Näherungswert und damit auch mit dem Inhalt des Dreiecks $\triangle PCQ$ zusammenhängen. Auch das hat ARCHIMEDES bereits gezeigt und bewiesen. Am Zahlenbeispiel sollen die Zusammenhänge zwischen den Dreiecksflächen gezeigt werden. Bereits berechnet und festgestellt wurde

$$\triangle PCQ = \frac{1}{2} \triangle PAQ = \frac{1}{2} \cdot \frac{343}{8} \quad \text{(Bild 3)}.$$

Außerdem läßt sich zeigen, daß sich für die folgenden vier Dreiecke der gleiche Wert ergibt:

$$\triangle PCB = \triangle BCQ = \triangle QCA = \triangle ACP = \frac{1}{4} \triangle PAQ$$
$$= \frac{1}{4} \cdot \frac{343}{8} \quad \text{(Bild 3)}$$

Wichtig für die weiteren Überlegungen sind die Beziehungen

$$\triangle PDC = \triangle CEQ = \frac{1}{4} \triangle PCQ = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{343}{8} \quad \text{und}$$

$$\triangle PGC = \frac{1}{2} \triangle PDC = \triangle CNQ = \frac{1}{2} \triangle QCE$$
$$= \frac{1}{8} \triangle PCQ = \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{343}{8} \quad \text{(Bilder 3 und 4)}$$

Für die Berechnung des zweiten Näherungswerts A_{PS2} spielen nämlich die Dreiecke $\triangle PDC$ und $\triangle QCE$ die gleiche Rolle wie das Dreieck $\triangle PAQ$ für die Berechnung des ersten Näherungswerts A_{PS2}.

Der erste Näherungswert war

$$A_{PS1} = \triangle PCQ = \frac{1}{2} \triangle PAQ$$

Für den zweiten Näherungswert gilt analog

$$A_{PS2} = \triangle PCQ + \triangle PGC + \triangle CNQ$$

Nun ist aber

$$\triangle PGC = \frac{1}{2} \triangle PDC = \frac{1}{8} \triangle PCQ \quad \text{und}$$

$$\triangle CNQ = \frac{1}{2} \triangle CEQ = \frac{1}{8} \triangle PCQ$$

und demzufolge

$$A_{PS2} = \triangle PCQ + \frac{1}{8}\triangle PCQ + \frac{1}{8}\triangle PCQ$$
$$= \triangle PCQ\left(1 + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}\right)$$
$$= \triangle PCQ\left(1 + \frac{1}{4}\right) = \frac{5}{4}\triangle PCQ$$

Beim nächsten Näherungswert kommen vier Dreiecke mit dem Flächeninhalt $\frac{1}{64}\triangle PCQ$ dazu, also ist

$$A_{PS3} = \triangle PCQ\left(1 + \frac{1}{4} + 4\cdot\frac{1}{64}\right)$$
$$= \triangle PCQ\left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{16}\right)$$
$$= \triangle PCQ\left(1 + \left(\frac{1}{4}\right)^1 + \left(\frac{1}{4}\right)^2\right) = \frac{21}{16}\triangle PCQ$$

Beim Übergang zum nächsten Schritt verringert sich jeweils der Flächeninhalt der einbeschriebenen Dreiecke auf 1/8, und die Anzahl der Dreiecke verdoppelt sich. Damit gilt:

$$A_{PS} = \triangle PCQ\left[1 + \left(\frac{1}{8}\right)\cdot 2 + \left(\frac{1}{8}\right)^2\cdot 4 + \left(\frac{1}{8}\right)^3\cdot 8 + \ldots\right]$$
$$= \triangle PCQ\left[1 + \left(\frac{1}{4}\right)^1 + \left(\frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{1}{4}\right)^3 + \ldots\right]$$

Den Grenzwert dieser geometrischen Reihe, von der jedes Glied der vierte Teil des voranstehenden Gliedes ist, hat bereits ARCHIMEDES gekannt. Er lautet:

$$A_{PS} = \triangle PCQ\left(\frac{1}{1-\frac{1}{4}}\right) = \frac{4}{3}\triangle PCQ$$

Damit ist die Behauptung des ARCHIMEDES bewiesen. Der Inhalt eines Parabelsegments ist vier Drittel des einbeschriebenen Dreiecks gleicher Grundlinie und Höhe oder zwei Drittel des Dreiecks, das von der Sehne und den in ihren Endpunkten gezogenen Tangenten begrenzt wird.
ARCHIMEDES hat also gezeigt, daß sich ein Parabelsegment „quadrieren" läßt. Man kann mit Zirkel und Lineal ein Quadrat konstruieren, das denselben Inhalt wie das Parabelsegment hat. In dem so verstandenen Sinn ist die Parabel eine einfachere Kurve als der Kreis. Ein Kreissegment kann nicht quadriert werden, eine Folge der Eigenschaft von der Zahl π, die eine transzendente Zahl ist. Aber auch mit der transzendenten Zahl und ihrer Berechnung nach der Exhaustionsmethode hat sich ARCHIMEDES beschäftigt.

2.4. Archimedes und die Zahl PI

Den BASIC-Kenner wird die Schreibweise der Zahl π nicht verwundern, denn das Drücken der Tasten P und I liefert diese irrationale Zahl mit sechs, acht oder noch mehr Stellen, je nach eingesetztem Interpreter. Bei der geschichtlichen Betrachtung dieser Zahl wird oft ARCHIMEDES genannt, obwohl sich später auch noch viele andere Wissenschaftler mit dieser Zahl beschäftigt haben, übrigens bis in unsere Zeit hinein, wo die moderne Rechentechnik zu Stellenzahlrekorden reizte.
Die meisten aber kennen ARCHIMEDES von der Badelegende her, die fast jeder Physiklehrer bei der Behandlung der Wichte bemüht. Nach ihr soll ARCHIMEDES, im Bade sitzend, die Lösung gefunden haben, einen vermeintlich goldenen Kranz des Königs HIERON auf minderwertige Metallbestandteile hin zu untersuchen. Er soll nach diesem Erkenntnisblitz unbekleidet und „Heureka" (Ich hab's) rufend nach Hause geeilt sein. Belegt ist der Vorgang nicht, er paßt aber zu den Berichten des griechischen Schriftstellers PLUTARCH. Er schreibt, daß ARCHIMEDES über sein Grübeln oft Essen und Trinken vergessen habe und gewaltsam zum Baden und Salben geschleppt werden mußte, wobei er sogar noch auf seinen gesalbten Körper, ebenso wie in Sand oder Asche, geometrische Figuren gezeichnet haben soll.
Bei seinen Messungen am Kreis konnte ARCHIMEDES durch einbeschriebene Vielecke den Kreisumfang rechnerisch ermitteln. Damit schuf er eine der frühesten Methoden zur Bestimmung der irrationalen und transzendenten Zahl π.
Wir wollen die Gedanken von ARCHIMEDES zunächst nachvollziehen, uns dann aber, wenn es um die rechnerische Ausführung zur Bestimmung von π geht, der modernen Rechentechnik bedienen. Dabei wird sich zeigen, daß wir auch hier vor Überraschungen nicht sicher sind. Ausgangspunkt der Archimedesschen Gedanken ist der Einheitskreis in Bild 6. Zunächst ist in Bild 6 ersichtlich, daß sich im Kreis ein reguläres n-Eck (zu Beginn $n = 3$) mit der Seite c und ein reguläres $2n$-Eck (zu Beginn $2n = 6$) mit der Seite a be-

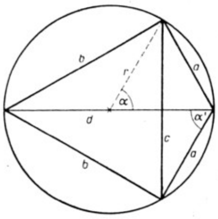


Bild 6. Einheitskreis

finden. Wir suchen jetzt eine Gleichung $a = f(c)$. Damit wird es möglich, uns schrittweise über einbeschriebene Vielecke (3-, 6-, 12-, 24-, 48-, 96eck usw.) dem Kreisumfang u zu nähern. ARCHIMEDES hat übrigens seine Berechnungen bis zum 96eck durchgeführt, natürlich ohne Computer. Es gilt ja $u = 2 \cdot \pi \cdot r$, und im Einheitskreis mit $r = 1$ gilt $u = 2 \cdot \pi$ und damit $\pi = \frac{u}{2}$.

Beim regulären 6eck beträgt $\alpha = 60°$. Aus Bild 6 ist ersichtlich, daß $\alpha = \alpha'$ ist. Daraus folgt weiter $a = r$, im Einheitskreis also $a = r = 1$. Zur Bestimmung von b nutzte ARCHIMEDES die Erkenntnisse seines Landsmanns PYTHAGORAS, der rund 300 Jahre vor ihm gelebt hatte. Nach dem Satz des PYTHAGORAS gilt:

$$a^2 + b^2 = d^2$$

$$b^2 = d^2 - a^2 \quad \text{im Einheitskreis } d = 2$$

$$\curvearrowright b^2 = 4 - a^2$$

$$b = \sqrt{4 - a^2} \quad \text{(nur positive Wurzel sinnvoll)}$$

Über die Berechnung des Flächeninhalts A des „Drachens" mit den Seiten $abba$ wird nun versucht, die Gleichung $a = f(c)$ herzuleiten. Dazu werden 2 Berechnungsarten für die Fläche A genutzt.

1. Berechnung der Fläche A:

$$A = \frac{d \frac{c}{2}}{2} \cdot 2$$

$$A = d\,\frac{c}{2} \quad \text{im Einheitskreis } d = 2$$

$$\curvearrowright A = c$$

2. Berechnung der Fläche A:

$$A = \frac{a\sqrt{4 - a^2}}{2} \cdot 2$$

$$A = a\sqrt{4 - a^2}$$

Wir setzen beide Flächenberechnungen gleich und erhalten:

$$c = a\sqrt{4 - a^2}$$

$$\frac{c}{a} = \sqrt{4 - a^2}$$

Die Gleichung ist nun nach a aufzulösen.

$$\frac{c^2}{a^2} = 4 - a^2$$

$$c^2 = 4a^2 - a^4 \quad \text{Substitution } a^2 = s$$

$$c^2 = 4s - s^2$$

$$c^2 = -s^2 + 4s$$

$$-c^2 = s^2 - 4s$$

$$-c^2 + 4 = s^2 - 4s + 4$$

$$-c^2 + 4 = (s - 2)^2$$

$$(s - 2)^2 = 4 - c^2$$

$$s - 2 = \pm\sqrt{4 - c^2} \quad \text{Es gilt } s = a^2$$

$$a^2 - 2 = \pm\sqrt{4 - c^2}$$

$$a^2 = 2 \pm \sqrt{4 - c^2} \quad \text{Da } a \text{ im Einheitskreis nicht größer als 1 werden kann, ist nur die negative Wurzel sinnvoll}$$

$$a = \sqrt{2 - \sqrt{4 - c^2}}$$

Damit liegt die gewünschte Gleichung $a = f(c)$ vor. Betrachten wir nun den Kreisumfang u, so gilt:

$$u = 2\pi r \quad \text{im Einheitskreis } r = 1$$

$$\curvearrowright u = 2\pi$$

$$\curvearrowright \pi = \frac{u}{2}$$

Wir werden die Berechnung mit der in Bild 6 gezeigten Situation beginnen. Danach ist

$$b = c = \sqrt{4 - a^2} \quad a = 1$$

$$b = c = \sqrt{3}\,.$$

Die Anzahl der Ecken des regulären n-Ecks beträgt $n = 3$.

Aus der Gleichung $a = \sqrt{2 - \sqrt{4 - c^2}}$ ergibt sich für $c = \sqrt{3}$

der Wert $a = 1$.

Damit folgt für $a = 1$ und $n = 3$ nach der Gleichung

$$\frac{u}{2} = a\,n$$

$$\frac{u}{2} = 3\,, \quad \text{also } \pi \approx 3\,.$$

Mit diesen Anfangswerten werden wir, ebenso wie ARCHIMEDES, zu rechnen beginnen. Im zweiten Rechengang verdoppeln wir die Anzahl der Ecken und setzen den Wert $a = 1$ als neuen Wert c in die Gleichung $a = \sqrt{2 - \sqrt{4 - c^2}}$ ein. Das Ganze dürfte für ARCHIMEDES ohne Computer, Rechenstab oder Quadratwurzeltabelle recht mühselig gewesen sein.

Wir wollen die Sache jetzt mit den uns heute zur Verfügung stehenden Rechenhilfsmitteln weiter verfolgen. Zu diesem

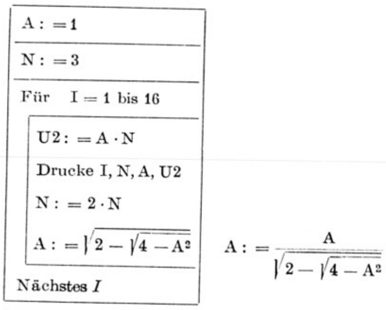


Bild 7. Struktogramm zur Berechnung von π

Zweck soll ein BASIC-Programm erarbeitet werden. Dazu stellen wir zunächst ein Struktogramm auf (Bild 7). Wie schon erwähnt, beginnen wir mit $a := 1$ und $n := 3$, errechnen dann $\frac{u}{2} := a \cdot n$ und geben $\frac{u}{2} \approx \pi$ aus (Variablenname für u ist u2). Die Verdoppelung des n-Ecks geht aus der Ergibtanweisung $n := 2 \cdot n$ hervor. Mit einer Ergibtanweisung errechnen wir dann auch das „neue a" aus dem „alten a", das wir bisher mit c bezeichnet hatten. Es gilt also

$$a := \sqrt{2 - \sqrt{4 - a^2}}\,.$$

Dann wird zur Berechnung von $u/2 \approx \pi$ zurückgesprungen. Das BASIC-Programm ist in Programm 2 angegeben. Nachdem in Zeile 20 der Tabellenkopf auf dem Bildschirm ausgegeben wird, folgt nach der Ausgabe einer Leerzeile die Zuweisung einer 1 für die Variable A und einer 3 für die Variable N. Die Zeilen 50 bis 100 enthalten in einer Laufanweisung alles zur Berechnung der Werte. Wir wollen 16 Berechnungen ausführen. Das entspricht dann schon einem 98304eck. Weitere Berechnungen sind für einen 8stelligen Interpreter sinnlos. Für einen 6stelligen Interpreter genügen auch weniger Berechnungen, um das noch zu erwartende Dilemma zu zeigen. In der Zeile 60 werden die laufende Nummer I und die Variablen N und A ausgegeben. Dann erfolgen in Zeile 70 die Berechnung und die Ausgabe der Variablen U2, die dem Näherungswert von π entspricht. Anschließend werden in den Zeilen 80 und 90 die neuen Werte für N und A festgelegt. Dann beginnt das Spiel von neuem, bis die Schleife insgesamt 16mal durchlaufen wurde.

Das Rechenergebnis zeigt Bild 8 als Bildschirmfoto. Bei dem hier verwendeten 8stelligen Interpreter sieht die Sache bis zum 384eck (also bis zur 8. Berechnung) noch ganz gut aus.

BASIC-Programm 2. BERECHNUNG VON PI

```
  10 REM BERECHNUNG VON PI
  20 PRINT "NR.";TAB (5);"N";TAB
 (15);"A";TAB (27);"PI"
  30 PRINT
  40 LET A=1: LET N=3
  50 FOR I=1 TO 16
  60 PRINT I;TAB (3);N;TAB (9);A

  70 LET U2=A*N: PRINT TAB (23);
U2
  80 LET N=2*N
  90 LET A=SQR (2-SQR (4-A↑2))
 100 NEXT I
 110 STOP
```

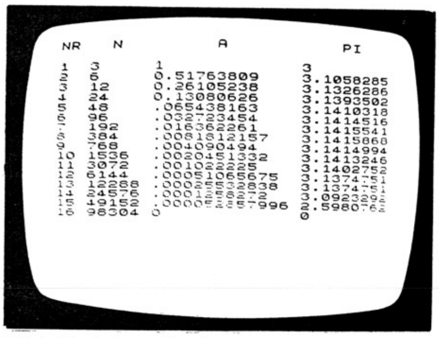


Bild 8. Ergebnis zur Berechnung von π

Dann aber fällt der Wert für π wieder ab, und schließlich liefert das 98304eck bei Nr. 16 nur noch Nullen. Wo steckt hier der Fehler? Einen Irrtum von ARCHIMEDES schließen wir von vornherein aus. Die Überprüfung des Programms 2 liefert auch keinen Fehler. Für den erfahrenen Programmierer ist es aber stets verdächtig, wenn im Rechenprogramm sehr große Zahlen (für N) und sehr kleine Zahlen (für A) auftreten und diese dann auch noch, wie in unserem Fall, multipliziert werden. Wir stoßen damit an die Grenze der Genauigkeit des Computers, da der Wert A offenbar nicht schnell genug kleiner wird, während N unaufhörlich wächst. Die Stelle, wo dieses Problem auftritt, ist demnach von der Genauigkeit des eingesetzten Rechners abhängig. So wird die Katastrophe bei einem guten Taschenrechner, der intern 13 Stellen verarbeitet, erst vom 11. Rechendurchlauf an deutlich. Sie wird aber stets eintreten, wenn wir nicht etwas unternehmen.
Die Beseitigung dieser Unannehmlichkeit fällt natürlich nicht mehr in den Verantwortungsbereich von ARCHIMEDES.

Uns bleibt nur der Versuch, den Ausdruck $\sqrt{2-\sqrt{4-a^2}}$ in eine „rechnerfreundliche" Form zu bringen. Eine Möglichkeit bietet das Erweitern.

$$\sqrt{2-\sqrt{4-a^2}} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{4-a^2}}\,\sqrt{2+\sqrt{4-a^2}}}{\sqrt{2+\sqrt{4-a^2}}}$$

Für den Zähler schreiben wir

$$\sqrt{\left(2-\sqrt{4-a^2}\right)\left(2+\sqrt{4-a^2}\right)}$$

$$\curvearrowright \sqrt{4+2\sqrt{4-a^2}-2\sqrt{4-a^2}-\left(\sqrt{4-a^2}\right)^2}$$

$$\curvearrowright \sqrt{4-(4-a^2)} = \sqrt{a^2} = a$$

Wir ersetzen jetzt im PAP (Bild 7) die Gleichung zur Berechnung von a durch

$$A := \frac{A}{\sqrt{2+\sqrt{4-A^2}}}$$

Das bedeutet, daß wir in unserem BASIC-Programm die Zeile 90 durch folgende Zeile ersetzen:

```
90 LET A = A/SQR (2 + SQR (4 — A↑2))
```

Dank dem Interpreterprinzip ist das problemlos möglich. Das Bildschirmfoto in Bild 9 zeigt das Ergebnis. Vom 12. Rechendurchlauf an (entspricht einem 6144eck) liefert der Computer stets den Wert 3,1415926 als Näherung für π. Als fest programmierten Wert liefert der 8stellige Interpreter übrigens in der letzten Stelle eine 7, da er freundlicherweise den aufgerundeten Wert bietet, aber das ist für uns hier nicht von Bedeutung. Vergleicht man die entsprechenden Werte für A im nichtkonvergierenden (Bild 8) und im konvergieren-

Bild 9. Korrektes Ergebnis zur Berechnung von π

den Fall (Bild 9), so kann A eindeutig als Übeltäter identifiziert werden.
ARCHIMEDES von Syrakus fand mit seiner Methode, die wir hier nachvollzogen haben, einen Näherungswert für π zwischen $\frac{223}{71}$ und $\frac{22}{7}$. Unabhängig von seiner erreichten Genauigkeit steht fest, daß Grundgedanke und Methode von ihm stammen und damit über 2000 Jahre alt sind. Ein Rechner, damals wie heute eingesetzt, hätte die Geistesarbeit nicht abgeschafft, sondern nur Schnelligkeit und Genauigkeit gefördert. Eine gedankenlose Anwendung hätte damals wie heute zu bösen Überraschungen geführt.
Zum Abschluß noch etwas für Zahlenfetischisten. Ein guter Taschenrechner stellt den Wert für π mit 13 Stellen bereit, wovon er zehn Stellen mit $\pi = 3{,}141592654$ anzeigt. Wenn man damit den Umfang eines Kreises vom Radius $r = 5$ m $= 5000$ mm berechnet, so erhält man

$$u = 2\,\pi\,r = 31\,415{,}92654\ \text{mm}\,.$$

Man kann also den Umfang auf 0,01 µm genau berechnen. Bereits 20 Stellen von π genügen, um einen Kreis von der Größe der Erdbahn mit einem Durchmesser von etwa 300 Millionen Kilometer auf ein Millionstel Millimeter genau zu berechnen. Somit kann man die Bestimmung von π auf beispielsweise 1000 Dezimalstellen als eine gänzlich überflüssige Genauigkeit bezeichnen.

2.5. Archimedes integriert ohne Integrale

Die Leistungsfähigkeit der Methode von ARCHIMEDES erstreckt sich auch auf die Berechnung eines Volumens, also eines dreidimensionalen Körpers. Das klassische Beispiel geht auf die Abhandlung „Die Methode“ des ARCHIMEDES zurück, die erst im Jahre 1906 gefunden wurde. Durch Zufall fand man auf einem Pergament unter einem geistlichen Text die Methodenlehre des ARCHIMEDES. Mit Hilfe aufwendiger fotografischer Methoden erkannte man die Abhandlung des ARCHIMEDES. In dieser Abhandlung löste ARCHIMEDES unter anderem die folgende Aufgabe: Zwei kreisrunde Zylinder mit gleichem Radius schneiden einander in rechten Winkeln; welches Volumen hat der Körper, den beide Zylinder gemeinsam enthalten? Die meisten Mathematiker halten diese Aufgabe ohne

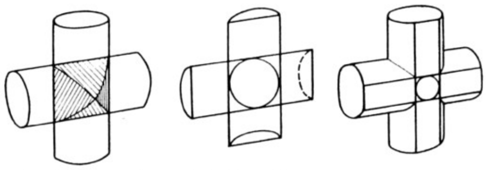


Bild 10. Zylinderkreuz des ARCHIMEDES

Anwendung der Integralrechnung für unlösbar. Und doch hat ARCHIMEDES die Aufgabe gelöst, vor über 2000 Jahren, und das Volumen des Schnittkörpers angegeben (Bild 10, links).
Es ist nicht sicher erwiesen, wie ARCHIMEDES vorging, um die Aufgabe zu lösen. Es gibt aber mindestens einen verblüffend einfachen Weg, der lediglich Schulwissen voraussetzt. Die Methode erinnert an die Exhaustionsmethode des ARCHIMEDES. Die Lösung der Aufgabe ist ein berühmter Beweis dafür geworden, wie man oft ohne Analysis, ohne Differential- und Integralrechnung, auf einfachem Weg eine doch komplizierte Aufgabe lösen kann.
In die Mitte des Zylinderkreuzes wird eine Kugel hineingedacht. Ihr Mittelpunkt ist der Schnittpunkt der beiden Zylinderachsen. Der Radius r der Kugel entspricht dem Radius der beiden Zylinder. Das Zylinderkreuz wird nun einfach in Scheiben zerschnitten. Wenn das Kreuz stabil auf dem Tisch liegt, sollen die Schnittebenen alle parallel zur Tischoberfläche sein. Die größte Schnittfläche des Zylinderkreuzes erhält man, wenn die Schnittebene den Abstand r (Radius der Zylinder) von der Tischoberfläche hat (Bild 10, Mitte). Dann geht die Schnittebene durch den Mittelpunkt der eingelegten Kugel und damit durch den Schnittpunkt der Zylinderachsen. Die beiden Zylinderachsen selbst liegen in der Schnittebene. Der Querschnitt des gesuchten Körpers ist ein Quadrat, der Querschnitt der Kugel ein Kreis. Der Kreis liegt einbeschrieben im Quadrat. Parallele Schnittlinien liefern immer die gleichen Querschnittsverhältnisse. Stets liegt der Kreis als Querschnitt der Kugel einbeschrieben im Quadrat als Querschnitt des gesuchten Körpers. Immer hat der Körper, der beiden Zylindern gemeinsam ist, einen quadratischen Querschnitt, und darin inliegend befindet sich der kreisförmige Querschnitt der Kugel (Bild 10, rechts).

Mit zehn Glasscheiben von 4 mm Dicke kann man sich das Zylinderkreuz und die Schnittflächen in des Wortes übertragener Bedeutung durchsichtig machen. Auf der Oberseite der obersten und der Unterseite der untersten Glasplatte sind lediglich zwei einander senkrecht kreuzende Geraden zu zeichnen. Auf der Oberseite der 2. Glasplatte von oben erscheint ein Kreuz aus jeweils zwei parallelen Geraden, die den quadratischen Querschnitt des gesuchten Körpers und den kreisförmigen Querschnitt der Kugel ergeben. Der Abstand a der parallelen Geraden ist $a = 2\sqrt{h(2r - h)}$, mit der

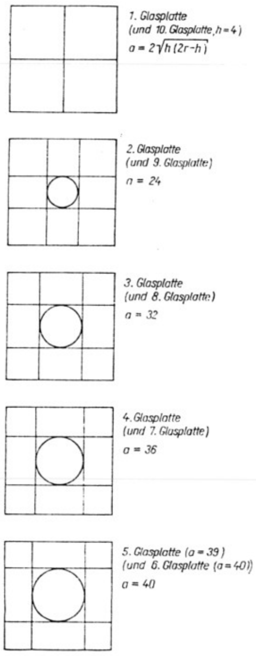


Bild 11. Schnittbilder auf den Glasscheiben

Glasscheibendicke $h = 4$ und dem Zylinderradius $r = 20$. Die Schnittbilder (Bild 11) ergeben nun, wenn man die Glasscheiben 1 bis 6 und um 180° gedreht 7 bis 10, von oben gezählt, übereinanderlegt, das räumliche Bild des Zylinderkreuzes mit dem Körper, der beiden Zylindern gemeinsam ist, und der eingelegten Kugel. Wer eine feinere Unterteilung wünscht, um die Körper besser erkennen zu können, müßte etwa 40 Folien für einen Tageslichtprojektor mit den jeweiligen Schnittbildern übereinanderlegen.

Die Schnittebenen übereinandergelegt kann man sich wie die Blätter eines Buches vorstellen. Die Vorstellung geht auf Bonaventura Cavalieri, einen italienischen Mathematiker des 17. Jahrhunderts, und mit ihm auf die Anfänge der Infinitesimalrechnung zurück. Archimedes schreibt sie Demokrit zu, später hat sie auch Kepler mit Vorteil benutzt (Abschnitt „Kepler und die Faßregel").

Das Volumen der Kugel im Zylinderkreuz ergibt sich aus der Summe aller kreisförmigen Querschnitte, wenn nur die Scheibendicke, der Abstand der Ebenen, fein genug gewählt wird. Ebenso ergibt sich das Volumen des Körpers, der den beiden Zylindern gemeinsam ist, aus der Summe aller quadratischen Querschnitte. Daraus folgt, daß das Kugelvolumen V_{Kugel} zum Volumen V_{gesucht} des gesuchten Körpers in dem gleichen Verhältnis steht wie die Kreisfläche A_{Kreis} zum Flächeninhalt A_{Quadrat} des Quadrates.

$$\frac{V_{\text{Kugel}}}{V_{\text{gesucht}}} = \frac{A_{\text{Kreis}}}{A_{\text{Quadrat}}}$$

Die Kreisfläche ist $A_{\text{Kreis}} = \pi a^2$, der Flächeninhalt des Quadrates ist $A_{\text{Quadrat}} = 4a^2$, das Kugelvolumen ist $V_{\text{Kugel}} = \frac{4\pi}{3} r^3$. Damit erhält man

$$\frac{\frac{4\pi}{3} r^3}{V_{\text{gesucht}}} = \frac{\pi a^2}{4a^2}$$

$$V = \frac{16}{3} r^3 = \frac{2}{3} (2r)^3$$

Archimedes hat ohne Integral gezeigt, daß das Volumen V des Körpers im Zylinderkreuz genau $\frac{2}{3}$ des Volumens eines Würfels gleicht, der die Kugel umschließt und der also die Seitenlänge vom Durchmesser jedes Zylinders hat.

Auf ähnliche Weise kann man auch das Volumen des Körpers ermitteln, der drei einander paarweise senkrecht schneidenden Zylindern mit gleichem Radius gemeinsam angehört. Zwei Jahrtausende nach Archimedes werden sich viele an der Lösung der Aufgabe vergeblich versuchen.

2.6. Die Archimedische Spirale

Die Frage: „Was ist eine Spirale?" wird in den meisten Fällen mit der Hand beantwortet. Die Hand führt eine kreisende Bewegung aus, und die beschriebenen Kreise werden immer größer. Eine sehr dürftige Beschreibung der Spirale. Dabei hat, offensichtlich als erster überhaupt, bereits Archimedes über die Spirale nachgedacht. Viele Sätze und ihre Beweise hat Archimedes in seiner Abhandlung „Über Spiralen" aufgeschrieben. Wir wollen vorausschicken, daß es viele Arten von Spiralen gibt.
Die Spirale des Archimedes wurde von ihm selbst folgendermaßen festgelegt (Ostwalds Klassiker der exakten Wissenschaften, Bd. 201):

„I. Wenn sich ein Halbstrahl in einer Ebene um seinen Endpunkt mit gleichförmiger Geschwindigkeit dreht, nach einer beliebigen Zahl von Drehungen wieder in die Anfangslage zurückkehrt und sich auf dem Halbstrahl ein Punkt mit gleichförmiger Geschwindigkeit, vom Endpunkt des Halbstrahls beginnend, bewegt, so beschreibt dieser Punkt eine „Spirale".

II. Der Endpunkt des Halbstrahls, der während der Bewegung des Halbstrahls fest bleibt, heiße „Mittelpunkt der Spirale".

III. Diejenige Lage der Geraden, von der aus die Bewegung des Halbstrahls beginnt, heiße „Leitlinie der Spirale."

In Polarkoordinaten lautet die Gleichung zur Darstellung einer Archimedischen Spirale:

$$r = a\varphi$$

Die Spiralenkonstante a und ihre Bedeutung folgen anschaulich aus der Definition I von Archimedes. Der Punkt auf dem Halbstrahl bewegt sich mit konstanter Winkelgeschwindigkeit und gleichförmiger Geschwindigkeit v. Der überstrichene Winkel ist $\varphi = \omega \cdot t$, und die zurückgelegte Entfernung vom Endpunkt ist $r = vt$. Wenn man t aus der ersten Beziehung ausrechnet und in die zweite Beziehung einsetzt, erhält man

$$r = \frac{v}{\omega}\,\varphi = a\varphi$$

Die Spiralenkonstante a wird für eine spezielle Archimedische Spirale noch berechnet.
Allerdings ist es für unsere BASIC-Programme günstiger, mit kartesischen Koordinaten zu arbeiten, denn die PLOT- oder PSET-Anweisung verlangt die Angabe des zu setzenden Pixels als Abstand von der linken unteren Ecke des Bildschirms in x- und y-Richtung. Wir nutzen deshalb die Umrechnung

$$x = r\cos\varphi \quad \text{und} \quad y = r\sin\varphi\,,$$

wobei wir gleich auf ein weiteres Problem stoßen, da der BASIC-Interpreter die Winkelangaben nur im Bogenmaß akzeptiert. Das ist leicht lösbar, indem wir schreiben

$$x = r\cos(\varphi\pi/180) \quad \text{und} \quad y = r\sin(\varphi\pi/180)\,.$$

Für eine sinnvolle Bildschirmdarstellung wählen wir $a = \frac{1}{360\ \text{Grad}}$. Daraus folgt: $r = \frac{\varphi}{360\ \text{Grad}}$, wobei beim Winkel $\varphi = 0$ Grad die Spirale im Koordinatenursprung beginnt. Unser Koordinatennetz spannen wir so auf, daß in x- und y-Richtung jeweils 4 Einheiten zum positiven und negativen Bereich gegangen wird. Daraus folgt, daß der Winkel φ von 0 Grad bis $\varphi = 4 \cdot 360$ Grad $= 1440$ Grad läuft. Natürlich hätten wir auch andere Feststellungen treffen können.
Das mit diesen Festlegungen geschriebene BASIC-Programm

BASIC-Programm 3. ARCHIMEDISCHE SPIRALE

```
  10 REM ARCHIMEDISCHE SPIRALE
  20 REM KOORDINATENNETZ ZEICHNE
N
  30 FOR I=50 TO 210 STEP 20
  40 PLOT I,10: DRAW 0,160
  50 NEXT I
  60 FOR I=10 TO 170 STEP 20
  70 PLOT 50,I: DRAW 160,0
  80 NEXT I
  90 REM SPIRALE BERECHNEN UND Z
EICHNEN
 100 FOR F=0 TO 1440
 110 LET R=F/360
 120 LET X=R*COS (F*PI/180)
 130 LET Y=R*SIN (F*PI/180)
 140 PLOT (20*X)+130,(20*Y)+90
 150 NEXT F
 160 STOP
```

zeigt Programm 3. In den Zeilen 30 bis 80 wird das Koordinatennetz mit der PLOT- und DRAW-Anweisung gezeichnet. Steht die DRAW-Anweisung nicht zur Verfügung, so muß für PLOT bzw. PSET noch eine innere Schleife mit einer Laufanweisung programmiert werden. Die in den Zeilen 30, 40, 60 und 70 enthaltenen Zahlen ergeben sich aus den Bildschirmfestlegungen. Wir haben den Mittelpunkt des Koordinatensystems bei $x = 130$ und $y = 90$ festgelegt und wählen einen Abstand von 20 Einheiten. In den Zeilen 30 bis 50 werden 9 senkrechte Koordinatenlinien gezeichnet, und zwar bei den x-Werten 50, 70, 90, 110, 130 (Mittellinie) usw. bis 210. Dafür sorgt die ergänzende Anweisung STEP 20. Ebenso zeichnen die Zeilen 60 bis 80 die 9 waagerechten Koordinatenlinien.
Die Laufanweisung in Zeile 100 garantiert die Berechnung von 1441 Einzelpunkten, da bei Fehlen der STEP-Anweisung in Einerschritten vorgegangen wird. In Zeile 110 wird das jeweilige r berechnet.
Da es den Buchstaben φ im BASIC-Zeichensatz nicht gibt, haben wir dafür ein F gesetzt. Natürlich wäre FI besser gewesen, aber manche Interpreter akzeptieren nur einstellige Laufvariablen. In den Zeilen 120 und 130 werden die x- und y-Koordinaten für den entsprechenden Punkt berechnet. Dabei wird gleich im Argument der Cosinus- und Sinusfunktion von Grad- in Bogenmaß umgerechnet. Die Darstellung auf dem Bildschirm erfolgt in Zeile 140. Die in dieser Anweisung enthaltenen Zahlen sind erforderlich, um die exakte Parallelverschiebung zu garantieren.
Beim Zeichnen der Spirale werden schon die zeitlichen Grenzen von BASIC deutlich. Für die Berechnung und Darstellung dieser 1441 Punkte benötigt der Computer 200 Sekunden. Das erzeugte Bildschirmfoto ist in Bild 12 angegeben. Durch die relativ große Anzahl von Punkten entsteht ein geschlossener Linienzug, der den Aufbau einer Archimedischen Spirale deutlich macht.
ARCHIMEDES hat in seiner Abhandlung „Über Spiralen" noch weitere Definitionen vorangestellt (Ostwalds Klassiker der exakten Wissenschaften, Bd. 201):

„IV. Diejenige geradlinige Strecke, die der Punkt während der ersten Umdrehung auf dem Halbstrahl zurücklegt, heiße „die erste", diejenige, die er während der zweiten Umdrehung zurücklegt, „die zweite" und in entsprechender Weise weiter.

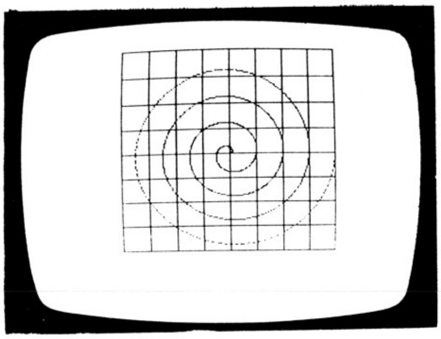


Bild 12. Darstellung einer Archimedischen Spirale

V. Das Flächenstück, das von der Spirale erster Umdrehung und der ersten Strecke begrenzt wird, heiße „erste Spiralenfläche", dasjenige, das von der Spirale zweiter Umdrehung und der zweiten Strecke begrenzt wird, heiße „zweite Spiralenfläche" und in entsprechender Weise weiter.

VI. Der Kreis um den Mittelpunkt der Spirale, der die erste Strecke zum Radius hat, werde „erster Kreis" genannt, derjenige mit dem gleichen Mittelpunkt und dem doppelten Radius der „zweite Kreis" und in entsprechender Weise weiter."

Mit diesen Definitionen stellt ARCHIMEDES z. B. folgende Behauptung auf:

„Die Fläche, die gebildet wird von der Spirale erster Umdrehung und der ersten Strecke auf der Leitlinie, ist gleich dem dritten Teile des Inhalts des ersten Kreises.
Es sei eine Spirale erster Umdrehung $ABCDE$ gegeben, F sei der Mittelpunkt der Spirale, AF die erste Strecke auf der Leitlinie der Spirale, $KGHI$ sei der erste Kreis, A_{Kreis} die Kreisfläche, deren Inhalt ein Drittel so groß ist. Es ist zu zeigen, daß die angegebene Fläche A_{Kreis} ist."
ARCHIMEDES beweist diese Behauptung, indem er auf geometrischem Weg im Sinne seiner Exhaustionsmethode zeigt,

daß die Spiralenfläche weder größer noch kleiner als A_{Kreis} sein kann, mithin der Kreisfläche A_{Kreis} entspricht. Mit Hilfe der Integralrechnung ist der Beweis einfacher. Der Flächeninhalt der Spirale ist

$$A_S = \frac{1}{2} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} r^2 \, d\varphi$$

Und mit $r = a\,\varphi$ erhält man

$$A_S = \frac{a^2}{6} (\varphi_2^3 - \varphi_1^3) = \frac{r_2^3 - r_1^3}{6a}$$

Der Flächeninhalt der Spirale erster Umdrehung mit $r_1 = 0$ und $r_2 = 2\,\pi\,a$ ist dann

$$A_{S1} = \frac{r_2^3}{6a} = \frac{4\pi^3 a^2}{3}$$

Die Fläche des ersten Kreises ist

$$A_{K1} = \pi\, r_2^2 = 4\,\pi^3\, a^2$$

Für das Verhältnis beider Flächen folgt sofort die Behauptung des ARCHIMEDES

$$\frac{A_{S1}}{A_{K1}} = \frac{1}{3}$$

Eine weitere Behauptung des ARCHIMEDES soll noch angeführt werden:

„Die Fläche, die begrenzt wird von der Spirale zweiter Umdrehung und der zweiten Strecke auf der Leitlinie, hat zum Inhalt des zweiten Kreises das Verhältnis 7:12."
„Es sei eine Spirale zweiter Umdrehung gegeben *ABCDE*. *F* sei der Mittelpunkt der Spirale, *FE* die erste Strecke auf der Leitlinie, *AE* die zweite, *AGHI* sei der zweite Kreis, und *AH*, *IG* seien zwei aufeinander senkrechte Durchmesser. Es ist zu zeigen, daß das Flächenstück, das von der Spirale *ABCDE* und der Strecke *AE* begrenzt wird, zum Kreise *AGHI* das Verhältnis 7:12 hat."

Die Grenzen zur Berechnung der Spiralenfläche sind

$$r_1 = 2\,\pi\,a \quad \text{und} \quad r_2 = 4\,\pi\,a\,, \quad \text{also}$$

$$A_{S2} = \frac{1}{6\,a} (r_2^3 - r_1^3) = \frac{28}{3} a^2 \pi^3$$

Die Fläche des zweiten Kreises ist

$$A_{K2} = \pi\, r_2^2 = 16\, a^2\, \pi^3$$

Daraus ergibt sich das von ARCHIMEDES bereits bewiesene Verhältnis

$$\frac{A_{S2}}{A_{K2}} = \frac{7}{12}$$

Flächenberechnungen bei Archimedischen Spiralen sind einfach und mit Hilfe der Integralrechnung elementar lösbar. Aufwendiger und schwieriger ist die Berechnung der Bogenlänge einer Archimedischen Spirale. Eine Schallplatte speichert Informationen durch eingeprägte Rillen. Auf einer LP beginnt die Rille außen etwa bei einem Radius von $r_2 =$ 140 mm und endet innen etwa bei einem Radius von $r_1 =$ 70 mm. Der mittlere Abstand zwischen zwei Rillen beträgt etwa $k = 0{,}11$ mm. Bevor wir die Länge der Rille, die Bogenlänge der Archimedischen Spirale, berechnen, wollen wir schätzen. Beträgt die Rillenlänge 10, 100, 500 oder gar 1000 m? Um den Anschluß an die grafische Darstellung zu bekommen (Bild 12), muß noch aus dem Rillenabstand k die Spiralenkonstante a berechnet werden.

$$a = \frac{k}{2\pi} = 0{,}02 \text{ mm}$$

Die Bogenlänge einer ebenen Kurve in Polarkoordinaten läßt sich berechnen nach der Formel

$$s = \int_{r_1}^{r_2} \sqrt{1 + r^2 \left(\frac{d\varphi}{dr}\right)^2} \, dr$$

Für die Archimedische Spirale $r = a\varphi$ ergibt sich daraus

$$s = a \int_1^2 \sqrt{1 + \varphi^2} \, d\varphi$$

Die Integration ist aufwendig, aber die Lösung des Integrals kann man Integraltafeln entnehmen.

$$s = a \left[\frac{\varphi}{2} \sqrt{1 + \varphi^2} + \frac{1}{2} \operatorname{arsinh} \varphi\right]_{\varphi_2}^{\varphi_1}$$

$$s = a \left[\frac{\varphi}{2} \sqrt{1 + \varphi^2} + \frac{1}{2} \ln\left(\varphi + \sqrt{1 + \varphi^2}\right)\right]_{\varphi_2}^{\varphi_1}$$

oder

$$s = \frac{a}{2}\left[\varphi_2 \sqrt{1+\varphi_2^2} - \varphi_1 \sqrt{1+\varphi_1^2} + \ln\left(\frac{\varphi_2 + \sqrt{1+\varphi_2^2}}{\varphi_1 + \sqrt{1+\varphi_1^2}}\right)\right]$$

$$= \frac{r_2 \sqrt{a^2+r_2^2} - r_1 \sqrt{a^2+r_1^2}}{2a} + \frac{a}{2} \ln\left(\frac{r_2 + \sqrt{a^2+r_2^2}}{r_1 + \sqrt{a^2+r_1^2}}\right)$$

Die Werte r_1, r_2 und a für eine LP können nun eingesetzt werden und ergeben nach langem Rechnen endlich die Rillenlänge s. Der Rechner hilft dabei sehr, aber es gibt einen anderen Weg. Für die Bogenlänge der Archimedischen Spirale gilt, wie schon erwähnt:

$$s = a \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \sqrt{1+\varphi^2}\, \mathrm{d}\varphi$$

Wenn auf 1 mm Abstand vom Schallplattenmittelpunkt jeweils immer 9 Rillen liegen, dann beginnt die Rille auf der LP bei einer Windungszahl von $140 \cdot 9 = 1260$ und endet bei der Windungszahl $70 \cdot 9 = 630$. Die Integrationsgrenzen sind also $\varphi_1 = 2\,\pi \cdot 630$ und $\varphi_2 = 2\,\pi \cdot 1260$.
Zur Lösung dieses Integrals benutzen wir die Simpsonsche Näherungsformel, die wir für einen Kleincomputer programmiert haben. Das BASIC-Programm wird im Abschnitt „Kepler und die Faßregel" betrachtet. Wir geben in den Computer die Funktionsgleichung, die obere und untere Integrationsgrenze und die Anzahl der Intervalle, in die der gesamte Integrationsbereich unterteilt werden soll, ein. Bei einer Anzahl von 100 Intervallen liefert ein Kleincomputer mit 8stelligem Interpreter nach 18 Sekunden den Wert 23503476. Multipliziert man dieses Zwischenergebnis mit $a = 0{,}02$, dann ergibt sich eine Rillenlänge von $s = 470\,0695$ mm ≈ 470 m. Im Sessel zurückgelehnt, und in der Neubauwohnung den Kopfhörer auf den Ohren, genießt man also rund 500 m Musik. Neben dieser Erkenntnis kann man außerdem feststellen, daß der Computer nicht nur Zahlentafeln für alle möglichen Funktionen ersetzt, sondern auch Integraltafeln überflüssig machen kann.
Wir beenden damit unseren Ausflug ins mathematische Altertum und wenden uns nun einem Mann zu, der die Herausbildung der klassischen Mathematik und Physik maßgeblich beeinflußte.

3. Johannes Kepler (27.12.1571 – 15.11.1630)

3.1. Biographie

Am Tage des Evangelisten Johannes, am 27. Dezember des Jahres 1571 nachmittags 2h 30, wurde Johannes Kepler im schwäbischen Weil der Stadt geboren. Seinen Vater Heinrich Kepler bezeichnete er als „einen lasterhaften, schroffen und händelsüchtigen Menschen", seine Mutter Katharina geb. Guldemann, eine Wirtstochter, als „klein, mager, dunkelfarbig, schwatzhaft, streitsüchtig und von unguter Art". Die Eltern führen ein unstetes Kriegs- und Wanderleben. Nach dem Erstgeborenen, dem Siebenmonatskind, Johannes, kamen noch weitere sechs Geschwister zur Welt, die alle den Großeltern übergeben wurden. Der schwächliche Johannes erkrankte 1574 an den Blattern, überstand zwar die Krankheit, behielt aber ein sehr belastendes Augenleiden zurück. Der Betrachter des Himmels und Begründer der Astronomie war kurzsichtig und lebenslang sehbehindert. Nach dem Besuch der Volksschule (1577/78) und der Lateinschule besteht Johannes das „Landesexamen" und wird 1584 in die Klosterschule zu Adelberg und 1586 in die Klosterschule Maulbronn aufgenommen. Am 25. 9. 1588, als nun fast Siebzehnjähriger, erlangt er in Tübingen die erste akademische Würde als Bakkalaureus. Das Studium der Theologie unter Mathias Hafenreffer und der Mathematik und Astronomie unter Michael Mästlin schließt er am 10. 8. 1591 in Tübingen mit der Erlangung der philosophischen Magisterwürde ab. Im Jahre 1594 wird Johannes Kepler als Professor für Mathematik an der Landschaftsschule zu Graz angestellt. Ohne Unterstützung durch die Eltern war Kepler während des Studiums auf ein Stipendium angewiesen. Das Jahresgehalt in Graz betrug 150 Gulden. Weitere 20 Gulden erhielt er für die jährliche Herausgabe eines Kalenders mit den üblichen Horoskopen und Prognosen für das kommende Jahr. Mit dem an sich geringen

Bild 13. JOHANNES KEPLER

Gehalt erweist sich für KEPLER, der lebenslang mit Geldsorgen belastet ist, die Grazer Zeit als finanziell durchaus abgesichert, noch dazu er eine reiche Witwe, BARBARA geb. MÜLLER von Mühlbeck, 1597 heiratet. Die religiösen Auseinandersetzungen, die schließlich zum Dreißigjährigen Krieg (1618—1648) führen, bestimmen dann das Leben von JOHANNES KEPLER. Verbannung aus Graz (1598), kurzer Aufenthalt in Linz, Flucht nach Prag (1600), Begegnung mit TYCHO DE BRAHE, Flucht vor der Pest aus Prag (1606), Übersiedlung nach Linz (1612), Reise nach Regensburg als Sachverständiger auf dem Reichstag (1613), Reise

nach Württemberg als Rechtsbeistand seiner Mutter im Hexenprozeß (1617), zweite Reise nach Württemberg (1620/21), unruhige Wanderjahre: Linz, Schwaben, Frankfurt a. M., Ulm, Regensburg, Linz, Prag (1626—1628), Übersiedlung nach Sagan zu Wallenstein (1628—1629), wegen Geldsorgen Reise nach Regensburg (1630). In diesem sehr bewegten Leben war KEPLER ungeheuer fleißig. Den Aufwand für Rechenarbeit für die Kalender und die Rudolphinischen Tafeln kann nur der einschätzen und würdigen, der sich selbst damit beschäftigt hat. Der Rechenaufwand, der zur Auffindung der KEPLERschen Gesetze führte, veranlaßte uns dazu, KEPLER als Arbeitserleichterung einen Computer zu wünschen. Leider können wir KEPLER dieses Geschenk nicht mehr machen. Was hätte KEPLER wohl noch schaffen können, wenn er einen Computer gehabt hätte! Immerhin hat JOHANNES KEPLER – gänzlich ohne Computer – bis zu seinem Tode 84 Werke veröffentlicht. Auf seiner letzten Reise, am 15. 11. 1630, kurz vor Erreichen seines 59. Lebensjahres, stirbt JOHANNES KEPLER in Regensburg. Der Leichnam KEPLERS wurde am 17. 11. auf dem St.-Peters-Friedhof außerhalb der Stadtmauer von Regensburg beigesetzt. Drei Jahre später wurde das Grab durch die Kriegswirren zerstört. Wie das Grab von ARCHIMEDES ist auch das Grab von KEPLER schon nach kurzer Zeit unauffindbar. Der lateinische Text der zerstörten Grabesaufschrift blieb erhalten und lautet in deutscher Übersetzung:

> Hier ruht der hochangesehene, hochgelehrte und weltberühmte Mann Herr Johannes Keppler
>
> 30 Jahre hindurch Mathematikus dreier Kaiser, Rudolfs II., Matthias' und Ferdinands II., vorher aber der steirischen Landschaft von 1594 bis 1600, dann auch der österreichischen Stände von 1612 bis zum Jahre 1628, der ganzen Christenheit bekannt durch seine Schriften, von allen Gelehrten den Fürsten der Astronomie zugezählt, der sich diese Grabschrift selbst bestimmt hat:
>
> Himmel hab' ich gemessen, jetzt meß' ich die Schatten der Erde
> Himmlischen Lebens mein Geist, Schatten mein Leib, der hier liegt.
> Gottergeben starb er in Christo im Jahr des Heils 1630 den 15. November im sechzigsten Jahr seines Lebens.

3.2. Die Keplerschen Gesetze

Am 17. Februar des Jahres 1600 wurde GIORDANO BRUNO wegen Abfalls und hartnäckiger Ketzerei von der Inquisition zum Tode verurteilt und in Rom auf dem Campo dei Fiori lebendig auf dem Scheiterhaufen verbrannt. Am 4. Februar des gleichen Jahres begegneten sich auf Schloß Benatek zum ersten Mal TYCHO DE BRAHE, der herausragende Himmelsbeobachter, und JOHANNES KEPLER, sein Nachfolger als Kaiserlicher Hofmathematiker. Eine Konjunktion von zwei Sternen erster Größe am Himmel der Astronomen. Der dreiundfünfzigjährige TYCHO DE BRAHE und der achtundzwanzigjährige JOHANNES KEPLER waren grundverschiedene eigenständige und eigensinnige Menschen. Es kam zwischen ihnen ständig zu Verstimmungen bis zu schweren Auseinandersetzungen. Als KEPLER aus Graz aus konfessionellen Gründen ausgewiesen wird, siedelt er am 19. Oktober 1600 endgültig nach Prag über und wird Assistent von BRAHE. Die unerfreulichen, oft verletzenden Auseinandersetzungen gehen weiter, aber es spricht wohl für beide, BRAHE und KEPLER, daß die Spannungen keine bleibenden Folgen gehabt haben. Beide müssen gewußt haben, daß sie sich gegenseitig brauchten, der ungeduldige KEPLER und der mißtrauische BRAHE. JOHANNES KEPLER hat die Lage, in der sich BRAHE befand, klar erkannt und beschrieben:

„TYCHO besitzt die besten Beobachtungen und damit gleichsam das Material zur Aufführung eines neuen Gebäudes; er hat auch Arbeiter und alles, was man sonst wünschen mag. Es fehlt ihm nur der Architekt, der dies alles nach eigenem Plan benützt. Denn wenn er auch eine recht glückliche Veranlagung und wirklich architektonisches Geschick besitzt, so hat ihn doch die Vielfältigkeit der Erscheinungen sowie die Tatsache, daß die Wahrheit in den einzelnen recht tief versteckt liegt, am Weiterkommen gehindert. Nun schleicht das Alter an ihn heran, das den Geist und alle Kräfte schwächt oder nach wenigen Jahren so schwächen wird, daß er schwer alles allein bewältigen kann."

TYCHO DE BRAHE war verbraucht, nicht mehr in der Lage, aus seinen eigenen Beobachtungsresultaten ein Himmelsgebäude zu errichten, das allen Prüfungen standhielt. Aber er war auch mißtrauisch und noch nicht so souverän, sein Zahlenmaterial zu seinen Lebzeiten einem anderen, auch nicht

KEPLER, zur Auswertung zu übergeben. KEPLER drängt, er glaubt, mit den Beobachtungsergebnissen BRAHES die Marsbahn in acht Tagen berechnen zu können; er braucht später viele Jahre.
Dann kommt die schicksalhafte Wende. Am 24. Oktober 1601 stirbt TYCHO DE BRAHE. Die Begegnung, die Zusammenarbeit, die Konjunktion zwischen KEPLER und BRAHE umfaßte etwa ein Jahr, nur etwa 2% ihres Lebens, und unter keinem guten Stern. Nach einigen Erbstreitigkeiten hält KEPLER endlich die Beobachtungsergebnisse BRAHES in seinen Händen, einen Ozean von Zahlen, und die Titanenarbeit der Auswertung beginnt. KEPLERS Einstellung ist bewundernswert:

„Wenn Gott um die Himmelskunde besorgt ist, was zu glauben Frömmigkeit verlangt, so hoffe ich, daß ich auf diesem Gebiete etwas leisten werde, da ich sehe, wie mich Gott durch ein unabänderliches Schicksal mit TYCHO verbunden und mich selbst durch die drückendsten Beschwernisse nicht hat von ihm getrennt werden lassen."

Die Verknüpfung des Lebenswerkes von TYCHO DE BRAHE, dem experimentellen Astronomen und Meßkünstler, mit dem von JOHANNES KEPLER, dem theoretischen Astronomen und Mathematiker, führt zu einem Umbruch im Weltbild. Die Vorstellungen des Mittelalters werden überwunden, und ein Weltgebäude entsteht, das durch Beobachtungen und Messungen bestätigt wird und damit unumstößlich ist und Ewigkeitswert besitzt.
Der weite Weg bis zu diesem Ergebnis, der Formulierung der drei Keplerschen Gesetze, läßt sich von uns mitverfolgen, weil KEPLER selbst über seine wissenschaftliche Arbeit und über seine Lebensumstände sehr viel mitgeteilt hat.
„Während in unserer Zeit die Gelehrtenart verlangt, daß man in seinen Werken die Not und Lust des Schaffens hinter einer sauber ausgearbeiteten Fassade verbirgt, gibt KEPLER überall, nicht nur in Briefen, sondern auch in wissenschaftlichen Arbeiten, seinen Gefühlen unmittelbaren, freien Ausdruck, was mit deren besonderen Reiz ausmacht. Er verhängt die Fenster seiner geistigen Werkstätte nicht, sondern läßt es gerne zu, wenn man ihm zuschaut, und freut sich, Menschen am Fenster zu finden, an die er sich mit seinen Gedanken und Gefühlen wenden kann" (MAX CASPAR, Neue Astronomie, 1929).
KEPLER war zunächst über das Beobachtungsmaterial, das er

in Tychos endlosen Zahlenreihen fand, sehr enttäuscht. Er hatte geglaubt, fertige Werte für die Exzentrizitäten und die Abstandsverhältnisse für die Planeten vorzufinden. Tycho hatte noch zu seinen Lebzeiten Kepler, wie dieser selbst mitteilt, „nach meinem Belieben die Beobachtungen eines einzelnen Planeten, des Mars, überlassen“. Und mit dem Planeten Mars beginnt Kepler die Auswertung, die nicht enden wollenden Rechnungen und seinen mathematischen Leidensweg. Kepler hat sich die Mühe gemacht, nach den Tychonischen Beobachtungen von 1580—1596 die scheinbare Marsbahn zu berechnen. Wenn der Mars auf seinem Weg am Himmel eine leuchtende Spur hinterlassen würde, so würde eine verwickelte schleifenförmige Linie erscheinen. Kepler hat die Zykloidenform dieses Weges in der ihm eigenen Art mit der „Gestalt einer Fastenbrezel“ verglichen (Bild 14).
Der Lauf des Planeten Mars am Himmel, von der Erde aus betrachtet, ist das Ergebnis der Bahnbewegung beider Planeten. Die Form der beobachteten Bewegung hängt wesentlich davon ab, ob der Planet näher an der Sonne steht als die Erde (innerer Planet) oder weiter entfernt ist (äußerer Planet). Mars ist ein äußerer Planet. Seine Bewegungen am Himmel und die Erdbewegungen wurden in monatlichen Abständen aufgezeichnet (Bild 15). Die Positionen beider

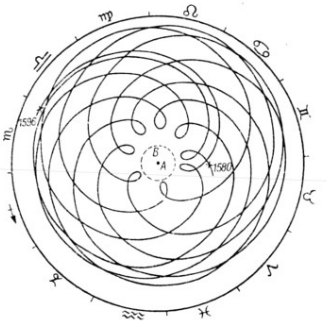


Bild 14. Scheinbare Bewegung des Mars am Himmelsraum vom Jahre 1580 bis zum Jahre 1596 in Gestalt einer Fastenbrezel

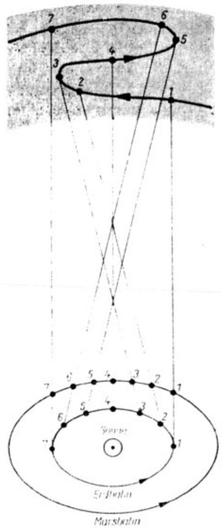


Bild 15. Zur Entstehung der scheinbaren Marsbahn am Himmel

Planeten Erde–Mars wurden miteinander verbunden und zeigen, wo der Planet Mars von der Erde aus relativ zu den Sternen des Hintergrunds zu sehen ist. Die überwiegende Zeit scheint sich der Mars von West nach Ost zu bewegen (rechtläufige Bewegung). Im Punkt 4 befinden sich Erde und Mars in Opposition; Sonne, Erde und Mars liegen in dieser Reihenfolge auf einer Geraden. Zwischen den Punkten 3 und 5 bewegt sich der Mars scheinbar von Ost nach West (rückläufige Bewegung). Wegen der relativen Neigung der Marsbahn zur Erdbahn erfolgt die scheinbare Bewegung des Mars nicht längs einer Geraden, sondern erscheint als z-förmige Kurve oder in einer Schleife.

Seine Gedankengänge beschreibt Kepler so:

„Daß die Bewegungen der Planeten kreisartig sind, wird dadurch bezeugt, daß sie sich beständig wiederholen.“

„Nun aber ist bei den herkömmlichen Lehren in der Einführung von Hilfskreisen kein Ende abzusehen; bei KOPERNIKUS dagegen ergeben sich die meisten Bewegungen aus der Annahme von ganz wenigen Kreisen. ... So hat jener Mann nicht nur die Natur von jenem lästigen Hausrat der ganzen großen Zahl von Kreisen befreit, er hat uns zudem einen immer noch unerschöpflichen Schatz von wahrhaft göttlichen Einsichten in die so herrliche Ordnung der ganzen Welt und aller Körper erschlossen."

KEPLER räumt nun mit dem „Hausrat der Epizyklen" auf.

Die astronomischen Beobachtungen der damaligen Zeit geben immer nur den Ort an der Himmelskugel an, wo der Himmelskörper erscheint. In einfacher Weise kann man sich das so vorstellen: Von dem betrachteten Himmelskörper wird durch den Beobachtungspunkt auf der Erdoberfläche und dem Erdmittelpunkt eine Gerade gezogen. Die Lage der Geraden, ihre Richtung, läßt sich eindeutig festlegen durch die Angabe von Längen- und Breitengrad auf der Erde. Zwei Winkelangaben genügen also, um die Richtung anzugeben, wo der beobachtete Himmelskörper am Himmel erscheint. In welcher Entfernung in dieser Richtung der Himmelskörper sich befindet, wurde nicht angegeben. Das war zur damaligen Zeit nicht meßbar. Aber gerade die Kenntnis eines Ortes im Raum ist notwendig, um die Art und Natur seiner Bewegungen mathematisch zu beschreiben. KEPLER fand zuerst eine Methode, die Entfernungen der Planeten aus den Winkelmessungen direkt zu berechnen, und zwar unabhängig von der Hypothese von PTOLEMÄUS oder KOPERNIKUS. Damit führte er als erster Astronom ein ganz neues Element, das Längenmaß, in die Astronomie und die astronomischen Rechnungen ein.

Bei den Entfernungsbestimmungen geht KEPLER von ausgewählten Stellungen der Planeten Mars und Erde am Himmel aus. Nach Ablauf eines Marsjahres steht der Mars nach einem vollen Umlauf auf seiner Bahn wieder an der gleichen Stelle. Von der Erde aus erscheint aber der Mars in einer anderen Richtung, gemessen von TYCHO DE BRAHE. Während des Marsumlaufs hat sich die Erde auch auf ihrer Bahn bewegt. Die Grundlinie des zu betrachtenden Dreiecks ist die Sehne auf der Erdbahn, die durch die beiden Orte bestimmt ist. Der dritte Punkt des Dreiecks ist der Ort, an dem sich der Mars befindet. Wiederum durch ausgewählte Stellungen am

Himmel, aus dem reichen Zahlenmaterial TYCHOS schöpfend, verschafft sich KEPLER die Größenverhältnisse für die Entfernungen Sonne–Erde–Mars. Diese Dreiecksmethode wendet KEPLER fortlaufend an, und als Ergebnis der Bemühungen erkennt er, daß die Planetenbahnen, zunächst von Mars und Erde, Kurven sind, die in einer Ebene liegen. Nun muß die Natur der ebenen Bahnen bestimmt werden. Wieder ist das Vorgehen KEPLERS neu und richtungweisend. KEPLER gibt das erste und vielleicht das glänzendste Beispiel einer vollständig durchgeführten Induktion in den Naturwissenschaften. Er geht von der Voraussetzung aus, die Marsbahn sei eine Kreisbewegung. Durch drei Orte des Mars, mühsam nach der Dreiecksmethode bestimmt, läßt sich stets ein Kreis legen. Ein vierter Marsort muß dann ebenfalls auf dem Kreis liegen, und Orte und Zeiten müssen mit den Beobachtungsergebnissen von TYCHO DE BRAHE übereinstimmen. Der Kreis müßte exzentrisch zur Sonne liegen. Wie weit von der Sonne entfernt und in welcher Richtung der Kreismittelpunkt liegen müßte, war aber KEPLER nicht bekannt. So bestanden die aufwendigen Rechnungen aus einem ständigen Probieren und Anpassen. Nach 5 Jahren und durch 70 gescheiterte Versuche kam KEPLER zu der Erkenntnis, daß seine Voraussetzung falsch ist, daß die Marsbahn keine Kreisbahn ist.

> „Die Planetenbahn ist kein Kreis, sondern eine ovale Figur."

Fortwährende weitere Versuche führen endlich zu der Entdeckung:

> „Also ist die Planetenbahn eine Ellipse."

Das **1. Keplersche Gesetz** kann niedergeschrieben werden:

> Die Planetenbahnen sind Ellipsen, in deren einem Brennpunkt die Sonne steht.

Mit der Kenntnis der Marsbahn ist aber noch nicht klar, zu welcher Zeit der Mars an einem bestimmten Ort zu sehen ist. Die Kreisbahn und die gleichförmige Geschwindigkeit des Planeten auf dieser Bahn hatten sich als falsche Voraussetzungen erwiesen. KEPLER mußte noch das Zeitgesetz finden, nach dem sich die Planeten ungleichförmig auf ihrer Bahn bewegen. Nach vielem vergeblichem Suchen nach der richtigen Marsbahn, zuerst der Kreis, dann die Eilinie

(Ooide), dann die Wangenlinie (linea buccosa), mit ihren vielen, vielen Rechnungen gelangt KEPLER endlich mit der Ellipse ans Ziel. Nur die Ellipse ermöglicht ihm neben der Ortsangabe auch das Auffinden eines Zeitgesetzes, in dem Zeiten und Flächen ins Verhältnis gesetzt werden können.

Damit ist das **2. Keplersche Gesetz** gefunden:

> Der Radiusvektor Sonne–Planet überstreicht in gleichen Zeiten gleiche Flächen.

Das 2. KEPLERsche Gesetz wird auch als **Flächensatz** bezeichnet und so formuliert:

> Die Flächengeschwindigkeit eines Bahnpunktes ist konstant.

Nach 8 Jahren kann KEPLER die Ergebnisse seiner aufwendigen und langwierigen Rechnungen, zu denen ihm ein Computer sicherlich hilfreiche Dienste geleistet hätte, vorlegen. Im Jahre 1609 erscheint in Heidelberg die Astronomia Nova (Neue Astronomie), das wohl bedeutendste astronomische Werk KEPLERS mit den beiden nach ihm benannten Gesetzen. Damit ist das Lebenswerk KEPLERS noch nicht abgeschlossen. Bereits in seinem Erstlingswerk, mit dem er überhaupt als Astronom bekannt und geschätzt wurde, dem Mysterium Cosmographicum (Weltgeheimnis, 1596), hat KEPLER Zusammenhänge zwischen Umlaufzeiten und Entfernungen der Planeten vermutet. Im Jahre 1619 erscheint die Harmonices mundi (Weltharmonik). Die Entdeckung des Zusammenhanges wird von KEPLER so geschildert:

„Hier muß nun wiederum eine Frage aus meinem Mysterium Cosmographicum erledigt und eingeschaltet werden, die ich vor 22 Jahren offen ließ, weil die Sache noch nicht klar war. Nachdem ich in unablässiger Arbeit einer sehr langen Zeit die wahren Intervalle der Bahnen mit Hilfe der Beobachtungen BRAHES ermittelt hatte, zeigte sich mir endlich, endlich die wahre Proportion der Umlaufszeiten in ihrer Beziehung zu der Proportion der Bahnen ...
Am 8. März dieses Jahres 1618, wenn man die genauen Zeitangaben wünscht, ist sie in meinem Kopf aufgetaucht. Ich hatte aber keine glückliche Hand, als ich sie der Rechnung unterzog, und verwarf sie als falsch. Schließlich kam sie am 15. Mai wieder und besiegte in einem neuen Anlauf die Finsternis meines Geistes, wobei sich zwischen meiner siebzehnjährigen Arbeit an den Tychonischen Beobachtungen und meiner gegenwärtigen Überlegung eine so treffliche Übereinstimmung ergab, daß ich zuerst glaubte, ich hätte geträumt und das Gesuchte in den Beweisunterlagen vorausgesetzt. Allein es ist ganz sicher und stimmt vollkommen, daß die Proportion, die zwischen den Umlaufzeiten irgend zweier Planeten besteht, genau das Anderthalbe der Proportion der mittleren Abstände, d. h. der Bahnen selber, ist, wobei man jedoch beachten muß, daß das arithmetische Mittel zwischen den beiden Durchmessern der Bahnellipse etwas kleiner ist als der längere Durchmesser."

Damit ist das **3. Keplersche Gesetz** gefunden:

> Das Verhältnis der dritten Potenzen der großen Halbachsen der Bahnen zu den Quadraten der Umlaufzeiten ist konstant.

In Potenzschreibweise erscheint uns das 3. Keplersche Gesetz sehr einfach. KEPLER hat aber das Gesetz zu einer Zeit gefunden und formuliert, als es die Potenzschreibweise noch gar nicht gab.
Nach siebzehn Jahren angestrengter Rechenarbeit hat JOHANNES KEPLER, immer wieder „gegen tausend Wände", wie er mitteilt, anstoßend, aus dem riesigen Zahlenmaterial von TYCHO DE BRAHE die drei Gesetze der Planetenbewegung gefunden. Die Weltanschauung, die gesamte wissenschaftliche Arbeit, das Weltbild verändern sich durch das Auffinden, durch die Existenz der Gesetze, durch die man die Abläufe am gestirnten Himmel beschreiben kann. Die ungeheure Arbeit, ohne Computer und in den Anfängen der Logarithmenrechnung, ist endlich abgeschlossen, am 15. 5. 1618, der Tag ist von KEPLER verbürgt überliefert.
Nur wenige Tage später, am 23. 5. 1618, werden die kaiserlichen Räte MARTINITZ und SLAWATA und der Sekretär FABRICIUS in Prag zum Schloßfenster in den Graben hinausgeworfen. Mit dem Prager Fenstersturz beginnt der Dreißigjährige Krieg und bringt über Europa unsägliches Leid.
Beide Ereignisse, die zeitlich nahezu zusammenfallen, sind Wegzeichen sehr unterschiedlicher Natur in der Menschheitsgeschichte, beide aber auch nahezu unfaßbar.
Die Keplerschen Gesetze sollen nun am Beispiel der Berechnung von Satellitenbahnen aufgezeigt und bestätigt wer-

den. Bei einem Zweikörperproblem sollen die beiden Körper die Massen m_1 und m_2 haben. Der Körper mit der Masse m_1 sei der Zentralkörper, entweder die Sonne für die Planetenbahnen oder die Erde für die Satellitenbahnen. Zwischen den beiden Massen wirkt die Gravitationskraft

$$F = f\,\frac{m_1 m_2}{r^2}$$

(f Gravitationskonstante, r Abstand zwischen den Massen m_1 und m_2)

Die Bewegungsgleichung für die Masse m_2 unter alleiniger Einwirkung der Zentralkraft F lautet

$$F = f\,\frac{m_1 m_2}{r^2} = m_2 a = m_2 \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} \qquad a \text{ Beschleunigung}$$

Daraus folgt

$$\mathrm{d}v = f\,\frac{m_1}{r^2}\,\mathrm{d}t$$

Zur Berechnung der Geschwindigkeit v muß nun integriert werden. Die numerische Integration wird nach dem EULER-CAUCHY-Verfahren durchgeführt. Dabei wird der Differentialquotient $\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$ näherungsweise durch den Differenzenquotienten $\frac{\Delta v}{\Delta t}$ ersetzt.

$$\Delta v = f\,\frac{m_1}{r^2}\,\Delta t$$

Bei alleiniger Einwirkung einer Zentralkraft erfolgt die Bewegung der Masse m_2 in einer Ebene. Aus dem Geschwindigkeitsdreieck v_0, v_1 und der Geschwindigkeitsänderung Δv lassen sich die Beziehungen für die erreichte Geschwindigkeit v_1 und die Winkeländerung $\Delta\alpha$ ableiten (Bild 16):

$$v_1 = \sqrt{v_0^2 + \Delta v^2 - 2 v_0 \Delta v \cos(\alpha - \varphi)}$$

$$\Delta\alpha = \arcsin\left(\frac{\Delta v}{v_1}\sin(\alpha - \varphi)\right).$$

Auf die gleiche Weise ($\Delta r_1 = v_1 \cdot \Delta t$) erhält man aus dem Abstandsdreieck r_0, r_1 und der Abstandsänderung Δr die neue Entfernung r_1 und die in der abgelaufenen Zeit Δt überstrichenen Winkel $\Delta\varphi$ (Bild 17):

$$r_1 = \sqrt{r_0^2 + \Delta r^2 - 2 r_0 \Delta r \cos(180^\circ + \varphi - \alpha)}$$

$$\Delta\varphi = \arcsin\left(\frac{\Delta r}{r_1}\sin(180^\circ + \varphi - \alpha)\right).$$

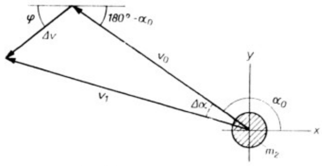


Bild 16. Geschwindigkeitsdreieck zur Berechnung von Satellitenbahnen

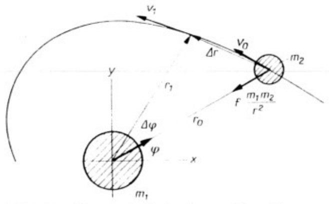


Bild 17. Abstandsdreieck zur Berechnung von Satellitenbahnen

Die Beschleunigung, die ein Satellit in bezug auf die Erde erfährt, seine Zentralbeschleunigung, ist

$$a_r = \frac{4\pi^2 r}{T^2} \qquad T \text{ Umlaufzeit}, \quad r \text{ große Halbachse}$$

Nach dem Gravitationsgesetz und der Bewegungsgleichung nach dem d'Alembertschen Prinzip gilt aber auch

$$F = f\,\frac{m_1 m_2}{r^2} = m_2 a_r$$

also

$$a_r = f\,\frac{m_1}{r^2}$$

Durch Gleichsetzen erhält man die Beziehung

$$\frac{r^3}{T^2} = \frac{f m_1}{4\pi^2}$$

Nach dem 3. Keplerschen Gesetz ist der Wert r^3/T^2 für alle Planeten eine Konstante. Für die Planeten erhält man (m_1 Sonnenmasse)

$$\frac{r^3}{T^2} = 3{,}355 \cdot 10^9\ \mathrm{km^3\,s^{-2}}$$

Für alle Satellitenbahnen um die Erde (jetzt m_1 Erdmasse) lautet die Konstante

$$\frac{r^3}{T^2} = 1{,}009 \cdot 10^4 \text{ km}^3 \text{ s}^{-2}$$

Wir wollen nun mit dem Kleincomputer Flugbahnen von Satelliten berechnen und zeichnen, die tangential zum Erdradius gestartet werden sollen. Dazu werden, entsprechend den soeben zusammengestellten Gleichungen, folgende Angaben benötigt:

1. Konstanten:

   Gravitationskonstante $f = 6{,}67 \cdot 10^{-20}$ km³ kg⁻¹ s⁻²
   Erdmasse $m_1 = 5{,}973 \cdot 10^{24}$ kg
   mittlerer Erdradius $r_0 = 6\,378$ km

2. Angenommene Anfangsbedingungen:

   Startzeit $t_0 = 0$
   Startwinkel $\varphi_0 = 0$ Grad und $\alpha_0 = 90$ Grad (tangentialer Start)

3. Eingabegröße:

   Anfangsgeschwindigkeit des Satelliten v_0 in km/s

Da wir den Differentialquotienten $\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$ näherungsweise durch den Differentenquotienten $\frac{\Delta v}{\Delta t}$ ersetzen, müssen wir bei der Berechnung der Flugbahn „schrittweise" vorgehen. Je kleiner die gewählte Schrittweite ist, desto genauer wird die Berechnung. Diese Genauigkeit wird allerdings mit einer höheren Rechenzeit erkauft. Wählt man z. B. als Schrittweite $\Delta t = 100$ s, dann wird der Rechenfehler so groß, daß ein völlig unsinniger Bahnverlauf entsteht. Auch bei $\Delta t = 20$ s ist bei einer elliptischen Flugbahn die Ellipse noch leicht verschoben. Man sieht das auf dem Bildschirm als gestörte Symmetrie an der großen Achse der Ellipse. Das Bedauerliche bei der Berechnung nach dem Differenzenquotienten ist, daß der Fehler Schritt für Schritt mitgeschleppt wird und sich dabei entsprechend vergrößert. Die Schrittweite $\Delta t = 5$ s ist ausreichend genau, aber hier kann in Abhängigkeit von der sich ergebenden Bahn die Rechenzeit einschließlich grafischer Darstellung mehrere Stunden betragen. Für die Computergrafik würde die erreichbare Auflösung bei Schrittweiten von 20 oder 50 Sekunden völlig

ausreichen, aber wie gesagt, um das Berechnen in möglichst kleinen Schritten kommen wir nicht umhin, wenn wir die Abweichungen von den exakten Werten gering halten wollen.

Wir rechnen mit Polarkoordinaten (Radius und Winkel), wobei der Winkel im Bogenmaß (BASIC-Interpreter) angegeben wird. Für die Darstellung der Bahn auf dem Bildschirm rechnen wir die Polarkoordinaten in kartesische Koordinaten um. Nach Anwendung eines Maßstabs (z. B. 1 : 200 für Angaben in km) und einer Koordinatentransformation werden die so ermittelten Punkte als Pixel auf dem Bildschirm dargestellt. Mit solch einem Computerprogramm lassen sich sehr schön die Auswirkungen verschiedener Anfangsgeschwindigkeiten auf die Flugbahn zeigen. Dabei können für die Bildschirmdarstellung Maßstabänderungen erforderlich werden. Auch das wird unser Programm erlauben. Damit haben wir ein kleines Raumfahrtzentrum im Wohnzimmer, wobei es bei den Näherungsrechnungen weder auf Tempo noch auf ein paar hundert Kilometer mehr oder weniger ankommt, aber das werden wir noch sehen.

Schließlich sollen noch die Keplerschen Gesetze mit diesem Programm nachvollzogen werden. Zu diesem Zweck werden der Radius und der zugehörige Winkel nach jeweils 1000 s Flugzeit erfaßt. An diesen Stellen wird dann ein Strahl vom Erdmittelpunkt zum Punkt auf der Flugbahn auf den Bildschirm gesetzt. Mit diesen ausgewählten und gespeicherten Flugbahnpunkten kann das 1. und 2. Keplersche Gesetz nachvollzogen werden. Dazu werden vorher noch bei einer Ellipsenbahn die große Achse ($2a$) und die doppelte lineare Exzentrizität ($2e$) rechnerisch ermittelt. Der so gewonnene 2. Brennpunkt wird auf dem Bildschirm dargestellt. Die große Halbachse $a = r$ und die Umlaufzeit T liefern den Punkt und die Werte, um die Konstante $\frac{r^3}{T^2}$ für Satellitenbahnen und damit das 3. Keplersche Gesetz zu überprüfen.

Die soeben beschriebenen Berechnungen erbringt das BASIC-Programm 4, das aus insgesamt 74 Programmzeilen besteht. In Zeile 20 werden insgesamt 40 Plätze für die Radien und Winkel reserviert, die sich aller 1000 s ergeben. Die Variable MA beinhaltet den Maßstab und kann, falls erforderlich, an dieser Stelle geändert werden. Allerdings wurde das Koordinatenkreuz und damit auch der Erdmittelpunkt in den Zeilen 70 bis 90 unveränderlich festgelegt. Wer hier verändern will, muß auch im Programm die entsprechenden Koordinaten ändern (Zeilen 250, 280, 330). Als einzige Eingabegröße wird in Zeile 50 die Anfangsgeschwindigkeit angegeben. Die Zeilen 120 bis 290 bilden das Kernstück des Programms, weil hier die einzelnen Bahnpunkte berechnet und gezeichnet

BASIC-Programm 4. SATELLITENBAHN

```
  10 REM SATELLITENBAHN
  20 DIM R(40): DIM F(40): LET M
A=200
  30 LET R=6378: LET R(1)=R: LET
 F=0: LET F(1)=F
  40 LET T=0: LET A=PI/2: LET DT
=5
  50 INPUT "ANFANGSGESCHWINDIGKE
IT= ";V
  60 REM KOORDINATEN UND ERDE ZE
ICHNEN
  70 PLOT 0,90: DRAW 255,0
  80 PLOT 210,0: DRAW 0,175
  90 CIRCLE 210,90,R/MA
 100 LET K=DT: LET J=1: LET KE=0
 110 REM BER. UND ZEICHN. DER BA
HN
 120 FOR I=K TO (K+1000-DT) STEP
 DT
 130 LET DV=6.67E-20*5.973E24*DT
/R↑2
 140 LET V=SQR (V↑2+DV↑2-2*V*DV*
COS (A-F))
 150 LET DA=ASN (DV*SIN (A-F)/V)
 160 LET DR=V*DT
 170 LET R=SQR (R↑2+DR↑2-2*R*DR*
COS (PI+F-A))
 180 LET DF=ASN (DR*SIN (PI+F-A)
/R)
 190 LET F=F+DF
 200 LET A=A+DA
 210 LET T=T+DT
 220 IF F>=2*PI THEN GO TO 300
 230 IF F>=PI AND KE=0 THEN LET
KE=1: LET RH=R
 240 LET X=R/MA*COS (F): LET Y=R
/MA*SIN (F)
 250 PLOT X+210,Y+90
 260 NEXT I
 270 LET J=J+1: LET R(J)=R: LET
F(J)=F
 280 PLOT 210,90: DRAW X,Y
 290 LET K=K+1000: GO TO 120
 300 REM ACHSE, BRENNPUNKT, BREN
NWEITE
 310 LET A2=RH+R: LET E2=RH-R: R
EM NAEHERUNGSW.
 320 LET X=E2/MA*COS (PI): LET Y
=0
 330 PLOT X+210,Y+90: DRAW 0,4:
DRAW 0,-8
 340 INPUT "KEPL. GES. UEBERPRUE
FEN(J/N)?";F$
 350 IF F$="N" THEN STOP
 360 REM UEBERP. 1. KEPL. GESETZ
 370 CLS : PRINT "ZUM 1. KEPLERS
CHEN GESETZ"
 380 PRINT "NR. DES";TAB (12);"S
TRECKENLAENGE"
 390 PRINT "FLUGPUNKTES";TAB (12
);"BRENNP.-BAHN-BRENNP."
 400 LET X1=0: LET Y1=0
 410 LET X2=E2*COS (PI): LET Y2=
0
 420 FOR I=2 TO 40
 430 LET F1=R(I)*COS (F(I))-E2*C
OS (PI)
 440 LET F2=R(I)*SIN (F(I))
 450 LET L=R(I)+SQR (F1*F1+F2*F2
)
 460 PRINT TAB (3);I;TAB (13);L
 470 NEXT I
 480 GO SUB 1000
 490 REM UEBERP. 2. KEPL. GESETZ
 500 CLS : PRINT "ZUM 2. KEPLERS
CHEN GESETZ"
 510 PRINT "NRN. DER";TAB (12);"
INHALT DER UEBER-"
 520 PRINT "FLUGPUNKTE";TAB (12)
;"STRICHENEN FLAECHEN"
 530 PRINT TAB (12);"IN 1000 s"
 540 LET X3=0: LET Y3=0
 550 FOR I=1 TO 39
 560 LET X1=R(I)*COS (F(I)): LET
 Y1=R(I)*SIN (F(I))
 570 LET X2=R(I+1)*COS (F(I+1)):
 LET Y2=R(I+1)*SIN (F(I+1))
 580 LET FL=.5*(X1*(Y2-Y3)+X2*(Y
3-Y1)+X3*(Y1-Y2))
 590 PRINT TAB (2);I;"-";I+1;TAB
 (13);FL
 600 NEXT I
 610 GO SUB 1000
 620 REM UEBERP. 3. KEPL. GESETZ
 630 CLS : PRINT "ZUM 3. KEPLERS
CHEN GESETZ": PRINT
 640 PRINT "GROSSE HALBACHSE"
 650 PRINT "ETWA ";INT (A2/2);"
km": PRINT
 660 PRINT "UMLAUFZEIT ETWA ";IN
T (T);" s": PRINT
 670 PRINT "FUER R↑3/T↑2"
 680 PRINT "ERGIBT SICH=";TAB (1
3);INT ((A2/2)↑3/T↑2);" km↑3*s↑-
2"
 690 PRINT "EXAKTER WERT=";TAB (
13);"10090 km↑3*s↑-2"
 700 STOP
1000 REM UP ABFRAGE
1010 INPUT "BEARBEITUNG FORTSETZ
EN(J/N)?";F$
1020 IF F$="N" THEN STOP
1030 RETURN
```


werden. Die Laufanweisung (Zeilen 120 bis 260) arbeitet mit der Schrittweite DT = 5 s. Der Wert der Variablen DT läßt sich in Zeile 40 leicht ändern. Bei einer Erhöhung der Schrittweite werden die Fehler dann auf dem Bildschirm sichtbar. Die Gleichungen in den Zeilen 130 bis 180 wurden schon erklärt. Allerdings haben nicht alle BASIC-Interpreter die Anweisung ASN zur Berechnung der arcsin (Zeile 150 und 180). Zum BASIC-Standard gehört aber die Anweisung ATN zur Berechnung des arctan, so daß man sich in diesem Fall mit der Beziehung ASN(X) = ATN(X/SQR(1—X*X)) helfen kann. Die schrittweisen Erhöhungen von φ, α und t (im Programm F, A und T) werden in den Zeilen 190 bis 210 realisiert.

Für die Ermittlung der großen Halbachse sind die Radien für $\varphi = \pi$ und $\varphi = 2\pi$ erforderlich. Für $\varphi = \pi$ wird der zugehörige Radius in Zeile 230 erfaßt und als Variable RH aufbewahrt. In Zeile 220 wird gefragt, ob $\varphi \geqq 2\pi$ ist. Das tritt nach vollständiger Berechnung eines Umlaufs ein. Wenn dies erfolgt ist, dann liegen die vollständige Zeichnung auf dem Bildschirm und die Radien und Winkel in 1000er Sekundenschritten vor, und es wird in Zeile 300 des Programms fortgesetzt. Die Zeile 310 berechnet die Länge der großen Achse und die zweifache lineare Exzentrizität der Ellipse; die Zeilen 320 und 330 zeichnen den 2. Brennpunkt auf den Bildschirm.

Wer sich nur die Flugbahn für die eingegebene Anfangsgeschwindigkeit ansehen wollte, der kann sich an dem mühsam (das gilt für den Computer) erarbeiteten Bildschirmfoto erfreuen und dann Schluß machen. Über den Programmabbruch oder dessen Fortsetzung entscheidet die Eingabe in der Zeile 340. Die Eingabe jedes beliebigen Zeichens außer einem großen N setzt die Bearbeitung fort. Dazu wird in Zeile 370 mit der Anweisung CLS zunächst die zeitaufwendig erarbeitete Grafik gelöscht. Wer die technischen Möglichkeiten hat, kann vorher das Bild auf einem grafikfähigen Drucker ausgeben oder den Inhalt des Bildwiederholspeichers auf einer Magnetbandkassette speichern. Dazu muß die Programmabarbeitung in der Zeile 340 unterbrochen werden. Die Vorgehensweise hängt vom Betriebssystem und dem BASIC-Interpreter ab, so daß hier keine Angaben gemacht werden können. Natürlich bleibt jedem, dessen Fernsehgerät einigermaßen scharfe Bilder liefert, die Möglichkeit des Fotografierens mit der Kleinbildkamera.

Die Zeilen 370 bis 390 liefern auf dem zuvor gelöschten Bildschirm den Tabellenkopf zur Überprüfung des 1. Keplerschen Gesetzes. In den Zeilen 400 bis 450 wird die Entfernung vom Brennpunkt 1 (Erdmittelpunkt) über den ausgewählten Bahnpunkt (aller 1000 s) zum Brennpunkt 2 ermittelt. Bei einer Ellipsenbahn muß dieser Wert für alle Bahnpunkte $2a$ (a große Halbachse) betragen. In Zeile 460 werden die Werte tabellarisch auf dem Bildschirm ausgegeben.

Damit genügend Ruhe zum Ansehen der Ergebnisse bleibt, wird in Zeile 1010 eines winzigen Unterprogramms gefragt, ob die Bearbeitung fortgesetzt werden soll. Eleganter wäre die Nutzung der INKEYS-Anweisung, die aber manche einfachen BASIC-Interpreter nicht haben. Der Tabellenkopf

für die Überprüfung des 2. Keplerschen Gesetzes wird in den Zeilen 500 bis 530 realisiert. Hier werden die Flächeninhalte der Dreiecke ermittelt, die zwischen zwei benachbarten Strahlen in 1000-s-Abständen vom Erdmittelpunkt ausgehen. Damit werden die in den Zeilen 540 bis 580 ermittelten Dreiecksflächen stets kleiner als in Wirklichkeit sein, da wir aus Gründen der Vereinfachung das jeweilige Bogenstück unberücksichtigt lassen.

Zur Überprüfung des 3. Keplerschen Gesetzes ist zu zeigen, daß $r^3/T^2 = 10090\ \mathrm{km^3 \cdot s^{-2}}$ ist. Der Wert für r entspricht der großen Halbachse a, wobei $2a$ schon in Zeile 310 (Variablenname A2) berechnet wurde. Die Umlaufzeit T hält der Computer aus seiner letzten Berechnung für uns noch bereit. In Zeile 680 wird die Konstante berechnet und auf dem Bildschirm angezeigt. Zeile 690 zeigt zum Vergleich den exakten Wert an. Das Programm endet bei Zeile 700.

In Bild 18 ist die Satellitenflugbahn für eine Anfangsgeschwindigkeit von 10 km/s angegeben. Für dieses Bild mußte der Computer bei einer Schrittweite von $\Delta t = 5$ s mehr als 4000 Bahnpunkte berechnen und benötigte dafür, in Abhängigkeit von der Stellenzahl des Interpreters, 80 bis 120 min Rechen- und Zeichenzeit. Der Start- und der Endpunkt der Flugbahn fallen nicht ganz genau zusammen. Das hat zwei Ursachen. Zum einen befindet sich der Satellit

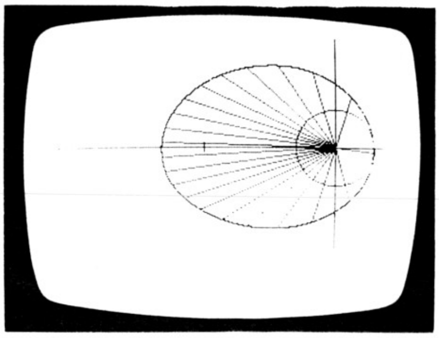


Bild 18. Satellitenflugbahn ($v_0 = 10$ km/s)

in der Startphase von der Erdoberfläche aus ja noch nicht auf der Ellipsenbahn. Zum anderen sind hier auch Rechenungenauigkeiten im Spiel, da der Differenzenquotient $\frac{\Delta r}{\Delta t}$ nur Näherungswerte liefert. Diese Ungenauigkeiten treten natürlich auch bei der Überprüfung der drei Keplerschen Gesetze auf. Für die große Halbachse a liefert der Computer den Wert 16,539 km. Die ermittelten Längen zum Nachweis des 1. Keplerschen Gesetzes schwanken ungefähr zwischen 32600 km und 33300 km, wobei der korrekte Wert bei $2a = 2 \cdot 16539$ km $= 33078$ km liegen mußte. Die maximale Abweichung von knapp 500 km erscheint uns riesig und würde für ein Koppelmanöver im Weltraum eine Katastrophe bedeuten. Für den Statistiker beträgt die Abweichung aber nur schmächtige $\pm$ 1,5%. Vielleicht wird hieran ein wenig klar, daß neben anderen Voraussetzungen erst eine exzellente Rechentechnik die Raumfahrt möglich machte. Zu diesen anderen Voraussetzungen gehört z. B. auch die Genauigkeit der Zeitmessung. Deshalb hat eine Zeitungsnotiz über die Entwicklung einer Wasserstoffmaser-Atomuhr, bei der eine Ungenauigkeit von 1 s erst nach 30 Millionen Jahren eintritt, durchaus ihre Berechtigung; zwar nicht für den Benutzer der Eisenbahn, wohl aber für den Benutzer eines Raumschiffs, denn eine Abweichung von einer milliardstel Sekunde kann schon Standortfehler von einigen Metern bewirken.

Unser Programm hat bei der Angabe der Längen auf dem Bildschirm noch einen Schönheitsfehler. In unserem Beispiel hat der Computer insgesamt 22 ausgewählte Flugpunkte gespeichert, für die er natürlich auch die Längen berechnet. Da wir aber insgesamt 40 Plätze reserviert haben (Zeile 20) und mit diesen, abgesehen vom 1. Wert, auch rechnen (Zeile 420), enthalten die Plätze 23 bis 40 den Wert 0 für r und φ. Auf dem Bildschirm wird aber nicht Null, sondern ein konstanter Wert angezeigt. Nach etwas Überlegung stellen wir fest, daß es sich bei diesem Wert um die zweifache lineare Exzentrizität der Ellipse handelt (etwa 19941 km). Diesen Schönheitsfehler kann man natürlich beseitigen. Dazu müßte die Anzahl der abgespeicherten Flugbahnpunkte gezählt und dieser Wert dann als obere Begrenzung in die Laufanweisung in Zeile 420 eingebaut werden.

Für die Überprüfung des 2. Keplerschen Gesetzes werden als Näherungsrechnung die Flächeninhalte der Dreiecksflächen berechnet, die sich nach jeweils 1000 s Flugzeit ergeben. Da wir das jeweilige Bogenstück unberücksichtigt lassen, liegt der berechnete Flächeninhalt stets unter dem wahren Wert. Diese Abweichung tritt besonders in der Nähe der x-Achse auf, da hier die Bogenstücke einen relativ großen Anteil am Gesamtflächeninhalt haben. So ergeben sich in Nähe der x-Achse Flächeninhalte von rund 26 Millionen km², während die Maximalwerte bei rund 32 Millionen km² liegen. Bei dieser großen Differenz fällt die Überprüfung schwer, obwohl man auf dem Bildschirm die Tendenz erkennen kann. Die exakte Berechnung der Flächen unter Einbeziehung der Bogenstücke ist aber auch nicht einfach. Vielleicht versucht sich der mathematisch interessierte Leser daran.

Für die Überprüfung des 3. Keplerschen Gesetzes liefert das Beispiel aus Bild 18 folgende Werte:

- große Halbachse $r = a \approx 16539$ km
- Umlaufzeit T für einen vollen Umlauf $T \approx 21090$ s.

Daraus ergibt sich für die Satellitenbahnkonstante $k \approx 10171$ km³ · s⁻², wobei der exakte Wert 10090 km³ · s⁻² beträgt. Den Fehler von 0,8% können wir hier getrost in Kauf nehmen, wenn unser näherungsweises Vorgehen akzeptiert worden ist.

Das vorgestellte BASIC-Programm ermöglicht es uns, beliebige Satellitenbahnen zu berechnen. Schwierigkeiten kann dabei der gewählte Bildschirmmaßstab bereiten, der sich aber im Programm leicht ändern läßt. Der Computer wird automatisch eine Fehlerausschrift bringen, wenn das zu setzende Pixel außerhalb eines Arbeitsfeldes liegt. Für unsere Flugbahnübungen sollten wir auch etwas über die verschiedenen kosmischen Geschwindigkeiten wissen. Bei einer Anfangsgeschwindigkeit von 7,9 km/s ergibt sich als Flugbahn ein Kreis. Allerdings ist dies ein theoretischer Wert, da er für die Höhe der Erdoberfläche gilt. Man bezeichnet ihn als Erdkreisbahngeschwindigkeit (früher: 1. kosmische Geschwindigkeit). Für die Überprüfung dieses Wertes muß lediglich die Zeile 90 im BASIC-Programm 4 gelöscht werden, in der die Erdoberfläche als Kreis gezeichnet wird. Ellipsenbahnen ergeben sich bei Anfangsgeschwindigkeiten, die größer als 7,9 km/s und kleiner als 11,2 km/s sind. Die Erdfluchtgeschwindigkeit (früher: 2. kosmische Geschwindigkeit) liegt bei 11,2 km/s. Hier ergibt sich eine Parabelbahn, die dann bei Anfangsgeschwindigkeiten $>$11,2 km/s in

eine Hyperbelbahn übergeht. Bei Anfangsgeschwindigkeiten $\geqq 16{,}4$ km/s verläßt der Raumflugkörper schließlich unser Sonnensystem.
Wir können hier nicht für alle möglichen Fälle entsprechende Bildschirmfotos bringen. Der interessierte Leser möge die gewünschten Flugbahnen selbst erzeugen. Es ist erstaunlich, wie geringe Änderungen der Anfangsgeschwindigkeit zu radikalen Änderungen der Flugbahn führen. Auch das zeigt wieder die Genauigkeitsanforderungen, die an die Raumfahrt gestellt werden müssen. Als Beispiel dazu zeigt Bild 19 die Flugbahn, die bei einer Anfangsgeschwindigkeit von $v_0 = 9$ km/s entsteht. Die Tendenz zum Kreis ist unverkennbar. Da in diesem Beispiel die Umlaufzeit T nur rund 8980 s beträgt, benötigt ein Computer je nach Interpreter für die Bilderzeugung zwischen 35 und 50 Minuten.
Für $v_0 = 10{,}35$ km/s entsteht die in Bild 20 dargestellte Flugbahn. Den „krummen" Zahlenwert haben wir nur gewählt, um im Programm den Maßstab nicht ändern zu müssen. Die Umlaufzeit T beträgt in diesem Beispiel 35320 s. Der Computer benötigte bei achtstelliger Genauigkeit rund 3 Stunden, um die 7064 Punkte zu berechnen und zu zeichnen. So bleibt uns zum Abschluß dieses Abschnitts nur noch, Ihnen Ausdauer, Spaß und Erkenntnisgewinn bei Ihren Flugversuchen zu wünschen.

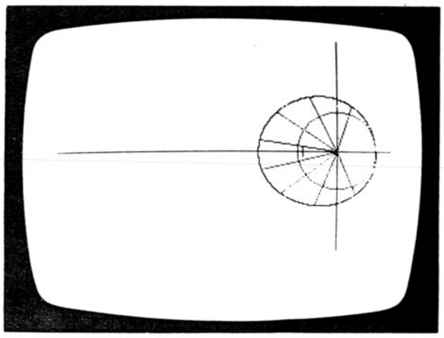


Bild 19. Satellitenflugbahn ($v_0 = 9$ km/s)

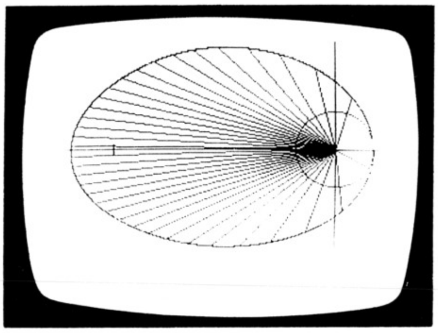


Bild 20. Satellitenflugbahn ($v_0 = 10{,}35$ km/s)

3.3. Kepler und die Himmelsfahrzeuge

Im Jahre 1610 erschien in Venedig die Abhandlung „Sidereus nuncius" (Sternenbote oder Sternenherold) von GALILEO GALILEI. In dieser Abhandlung berichtet GALILEI von seinen Beobachtungen mit einem von ihm selbst gebauten Fernrohr: Berge und Täler auf dem Mond, die Milchstraße als Anhäufung von Sternen, viele neue Sterne und vor allem über vier Jupitermonde. Am 8. April 1610 hat KEPLER die Abhandlung erstmalig gelesen, und bereits am 19. April schickt er GALILEI seine Antwort, die gleichzeitig gedruckt wird: Dissertatio cum Nuncio Sidereo (Unterredung mit dem Sternenboten). KEPLER ist begeistert und schildert seine erste Begegnung mit den neuen Entdeckungen: „Als mir das Dr. JOH. MATTHAEUS WACKHER VON WACKENFELS, der angesehene Kaiserliche Ratsherr und Berichterstatter der kaiserlich-geistlichen Oberbehörde, vom Wagen aus vor meiner Wohnung erzählte, da überschlich mich ein wunderbares Gefühl bei dem seltsamen Berichte. Ich fühlte mein Gemüt im Tiefsten bewegt (denn unerwartet löste sich so ein alter Gelehrtenstreit von uns beiden). (Wir beide wurden bestürzt.) Bald war er freudig ergriffen, ich fieberhaft erregt: dann lachten wir beide in unserer Verwirrung; jetzt erzählte er wieder weiter, und ich lauschte gespannt – so kamen wir kaum zu Rande."

KEPLER erkennt die Bedeutung von GALILEIS Entdeckungen und ist voller Anerkennung: „Ich sehe, daß den Weltweisen und Sternforschern mächtige und überaus wundervolle Schauspiele vorgelegt werden, wenn ich mich nicht täusche; ich sehe, daß alle echten Wahrheitsforscher zum Anbruch großer Ereignisse zusammenberufen werden." „Vielleicht hält man mich für verwegen, weil ich Deine Aussprüche ohne das Gewicht eigener Beobachtungen leichtlich als wahr ansehe." „Ich soll also einem Altbürger von Florenz Glaubwürdigkeit um Dinge absprechen, die er gesehen hat? Ich, Kurzsichtiger, dem Scharfäugigen? ... Ich soll Aussagen eines Mannes bezweifeln, der alle Zeitgenossen zur Beobachtung auffordert und der (was nicht wenig besagt) sein eigenes Beobachtungsmittel anbietet, um die Augen selbst Zuversicht finden zu lassen!"

„Jetzt möchte ich aber von ganz ausgemachten Sachen, die meine Augen hoffentlich sehen werden, mit Dir verhandeln, teurer GALILEI; will das Verfahren Deines Buches befolgen und will alle Gebiete der Naturwissenschaft, die nach Deinem „Sternenboten" vom Untergange bedroht sind, sich bestätigen oder sich klären, genau überschauen. Dann bleibt nichts zurück, was den ersten Leser in Zweifel versetzen, was zum Mißtrauen in Deine Ergebnisse verleiten oder gar bestimmen könnte, eine bisher hochgestellte Weltauffassung fallen zu lassen."

KEPLER vermutet, daß nach den vier Gestirnen, den Jupitermonden, „noch unzählig viele andere entdeckt werden würden". „Auch DEMOKRITOS und LEUKIPPOS, von den Neueren BRUNO und BRUTTIUS (BROOCE), Dein Freund, GALILEI, und der meine, glauben, daß unendlich viel andere Welten (oder wie BRUNO sagt: Erden) der unseren ähnlich sein mögen."

Nach der Besprechung von optischen Fragen, das Fernrohr betreffend, werden Größe und Helligkeit der Fixsterne eingeordnet und der Mond ausführlich behandelt. Behutsam und vornehm zurückhaltend, eingebettet in anerkennende Worte, gelingt es KEPLER, einigen Behauptungen GALILEIS zu widersprechen oder sie phantasievoll weiterzuführen.

„Bei diesem Anlasse kann ich mich nicht zurückhalten, einige Scheinwidersprüche in Deinen Behauptungen schon hier anzuerkennen und ihren Wahrheitsgehalt zu betonen; z. B. wenn Du sagst, daß nicht bloß der Mond, sondern auch der Jupiter bewohnt sei, oder daß diese Landstriche jetzt erst entdeckt werden sollen. Einige Teilnehmer einer kürzlich abgehaltenen wissenschaftlichen Zusammenkunft haben es schon scherzhaft zu den Tatsachen gezählt. Sicherlich wird es an Landbauern aus dem Menschengeschlechte nicht fehlen, sowie man die Kunst des Fliegens beherrschen wird. Wer hätte jemals geglaubt, daß die Seefahrt auf dem weitgedehnten Weltmeer ruhiger und gefahrloser sei als in den eng drohenden Buchten der Adria, der Ostsee und der britischen Meerenge. Schaff' nur Fahrzeuge oder Segel, die der Himmelsluft angepaßt sind, dann kommen schon Leute, die sich nicht einmal vor jener weiten Öde fürchten werden. Inzwischen wollen wir, sozusagen kurz vor der Ankunft dieser kühnen Himmelsfahrer, Himmels-Länderkarten ausarbeiten, ich für den Mond, Du, GALILEI, für den Jupiter!

Dergleichen schiebt sich lieblich in die Wundertaten menschlicher Kühnheit, die sich gerade in den Menschen dieses Zeitalters so gewaltig emporschwingt."

In unserer Zeit gibt es Himmelsfahrzeuge, „Wundertaten menschlicher Kühnheit". „Segel, die der Himmelsluft angepaßt sind", gibt es zwar nicht, aber Himmelsfahrzeuge, mit denen „kühne Himmelsfahrer", Kosmonauten und Astronauten, die Erde verlassen. Die Fortbewegungsart der Raketen, als Rückstoßprinzip bezeichnet, ist der „Himmelsluft", dem leeren Weltraum, angepaßt. Im schwerelosen Raum des Alls wäre keine Bewegungsänderung ohne Ausnutzung von Reibungskräften möglich. Auch der Start von Satelliten und ihre Kursänderungen beruhen auf dem Rückstoßprinzip. Wir hatten im vorigen Abschnitt die Flugbahn von Satelliten berechnet und gezeichnet und waren dabei von einer tangential zur Erdkrümmung liegenden Startposition ausgegangen. In Wirklichkeit wird der Start natürlich mit Trägerraketen ausgeführt, die in einem bestimmten Winkel zur Erdoberfläche gestartet werden. Wir stellten weiterhin fest, daß die Flugbahn des Satelliten durch dessen Anfangsgeschwindigkeit bestimmt wird. Damit ist die Geschwindigkeit gemeint, die sich nach dem Abtrennen der Trägerrakete und damit zu Beginn der reinen Satellitenbewegung ergibt. Die Rakete muß nun so dimensioniert werden, daß sich die gewünschte Anfangsgeschwindigkeit der Satellitenbewegung einstellt. In diese Berechnung geht auch die Masse des Satelliten ein, im Gegensatz zum vorigen Abschnitt, bei dem nur die reine Satellitenbahn, die unabhängig von der Masse

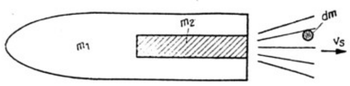


Bild 21. Rückstoßprinzip einer Rakete

des Satelliten ist, betrachtet wurde. Zur Untersuchung dieser Startphase betrachten wir die Rakete als einen sich bewegenden Körper, dessen Masse durch Ausstoß der Verbrennungsgase ständig geringer wird.

Die Bewegung einer Rakete mit der Nutzmasse m_1 und der Brennstoffmasse m_2 kommt dadurch zustande, daß · Verbrennungsgase mit der Geschwindigkeit v_s ausgestoßen werden (Bild 21). Nach dem Impulssatz ist

$$(m_1 + m_2)\,\mathrm{d}v + v_s\,\mathrm{d}m = 0$$

Die Integration erstreckt sich vom Anfangszustand mit der Geschwindigkeit v_a und der Masse $(m_1 + m_2)$ zum Endzustand mit der Geschwindigkeit v_e und der dann noch verbleibenden Nutzmasse m_1 ($v_s = \text{const}$)

$$\int_{v_a}^{v_e} \frac{\mathrm{d}v}{v_s} = \frac{1}{v_s}(v_e - v_a) = -\int_{m_1+m_2}^{m_1} \frac{\mathrm{d}m}{m_1 + m_2} = \ln\frac{m_1 + m_2}{m_1}$$

$$= \ln\left(1 + \frac{m_2}{m_1}\right)$$

Wenn die Startgeschwindigkeit $v_a = 0$ ist, erhält man eine einfache Beziehung für die Auslegung der Rakete, ihr Nutzlast-Brennmasse-Verhältnis:

$$\frac{m_2}{m_1} = \exp\left(\frac{v_e}{v_s}\right) - 1$$

Die Bewegungsgleichung der Rakete erhält man durch Gleichsetzung von Masse mal Beschleunigung mit den angreifenden Kräften, der Rückstoßkraft und der Gravitationskraft (Bild 22)

$$ma = \frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t} v_s + \frac{f\,M\,m}{r^2}$$

(m Masse der Rakete, a Beschleunigung der Rakete, M Erdmasse, f Gravitationskonstante, r Abstand Erde – Rakete, v_s Austrittsgeschwindigkeit der Brenngase)

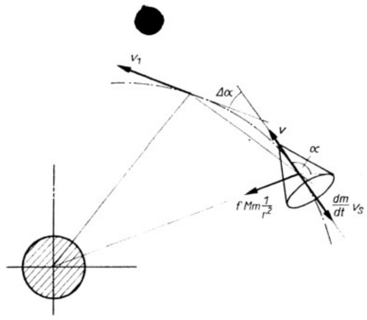


Bild 22. Geschwindigkeitsdreieck zur Berechnung der Raketenbewegung

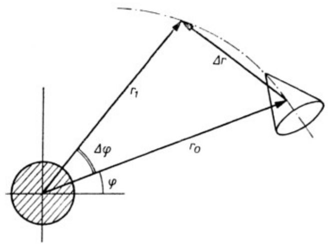


Bild 23. Abstandsdreieck zur Berechnung der Raketenbewegung

Die Komponenten der Beschleunigung in x- bzw. y-Richtung sind

$$a_x = \frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}\,\frac{v_s \cos\alpha}{m} + fM\,\frac{\cos(180^\circ + \varphi)}{r^2}$$

$$a_y = \frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}\,\frac{v_s \sin\alpha}{m} + fM\,\frac{\sin(180^\circ + \varphi)}{r^2}$$

Vereinfachend, wie $v_s = \text{const}$ bei der Integration, wird vorausgesetzt, daß $\mathrm{d}m/\mathrm{d}t = u = \text{const}$ ist, daß die je Zeiteinheit entstehenden Verbrennungsgase während der ge-

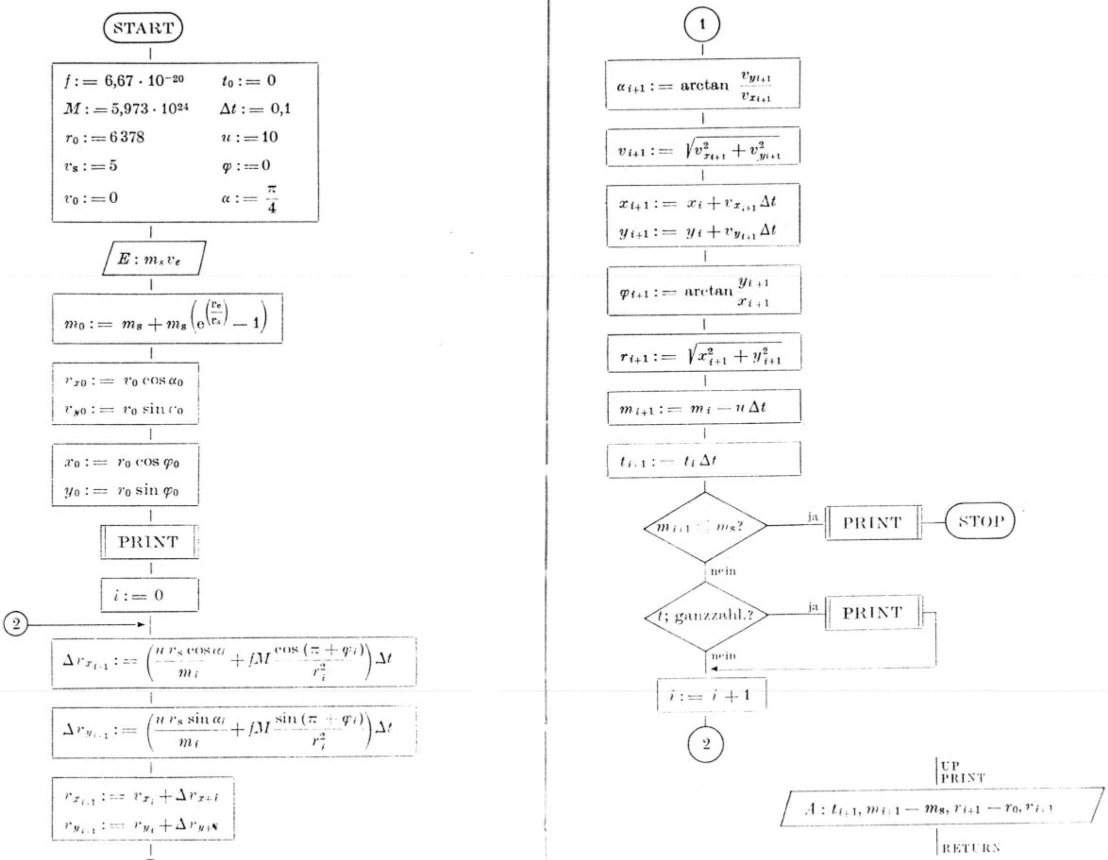


Bild 24. Programmablaufplan zum Raketenstart

samten Startphase konstant sind. Damit nimmt die Raketenmasse m linear ab:

$$m = (m_1 + m_2) - ut = m_0 - ut$$

Nach dem Euler-Cauchy-Verfahren wird der Differentialquotient durch den Differenzenquotienten ersetzt

$$\Delta v_x = \frac{u\, v_s \cos\alpha}{m_0 - ut} + fM \frac{\cos(180^\circ + \varphi)}{r^2} \Delta t$$

$$\Delta v_y = \frac{u\, v_s \sin\alpha}{m_0 - ut} + fM \frac{\sin(180^\circ + \varphi)}{r^2} \Delta t$$

Alle diese Vereinfachungen, einschließlich der Vernachlässigung des Strömungswiderstands, machen deutlich, daß es sich auch hier wieder nur um eine Näherungsrechnung handelt, wir also nie einen Kosmonauten auf solch eine Flugbahn schicken würden. Wir wollen aber ungefähr eine Rakete dimensionieren, die einem Satelliten mit festgelegter Masse in einer bestimmten Entfernung von der Erdoberfläche eine gewünschte Fluggeschwindigkeit verleiht. Aus dieser Geschwindigkeit ergibt sich dann, wie im vorigen Abschnitt beschrieben, der Bahnverlauf.
Die gedankliche Vorarbeit für das BASIC-Programm steckt im Programmablaufplan in Bild 24. Die Gravitationskonstante f, die Erdmasse m_{Erde} und der Erdradius r_0 wurden schon bei der Ermittlung der Satellitenflugbahn benutzt. Folgende Anfangsbedingungen werden angenommen:

Ausstoßgeschwindigkeit der Verbrennungsgase $v_s = 5$ km/s
Masseverlust je Zeiteinheit $u = 10$ kg/s
Startgeschwindigkeit $v_0 = 0$ km/s
Startzeit $t_0 = 0$ s
Startwinkel $\varphi = 0$ und $\alpha = \frac{\pi}{4}$
Berechnungsschrittweite $\Delta t = 0{,}1$

Einzugeben sind die Satellitenmasse m_s und die gewünschte Bahngeschwindigkeit des Satelliten v_e.
Zunächst wird in Abhängigkeit von v_e, v_s und m_s die Gesamtmasse m_0, die auf die Startrampe kommt, ermittelt. Dann folgt eine Umrechnung der Geschwindigkeits- und Bahnparameter von Polar- in kartesische Koordinaten, worauf diese Anfangswerte auf dem Bildschirm angezeigt werden. Die Berechnungsschleife beginnt mit der Ermittlung der Geschwindigkeitsdifferenzen $\Delta v_{x_{i+1}}$ und $\Delta v_{y_{i+1}}$. Diese beiden

Gleichungen bilden das Kernstück, da sie mit u, v_s, α_i, φ_i, r_i und m_i über den Erfolg des Unternehmens entscheiden. So steckt im Produkt $u \cdot v_s$ die Schubkraft der Rakete, so daß bei zu kleiner Schubkraft im Verhältnis zur Satellitenmasse (und damit der Gesamtmasse) ein Fehlstart unausbleiblich ist. Das werden wir alles gefahrlos am Kleincomputer durchspielen können.
In den folgenden Schritten des Programmablaufplans (PAP) in Bild 24 werden die neuen Geschwindigkeits- und Bahnparameter dann wieder in Polarkoordinaten umgerechnet, um für den nächsten Rechenschritt zur Verfügung zu stehen. Bevor dieser beginnt, wird aber erst der Masseverlust abgezogen (…$- u \cdot \Delta t$) und die verstrichene Zeit addiert (…$+ \Delta t$). Die Bedingung $m_{i+1} \leqq m_s$ erzwingt den Programmabbruch, wenn kein Brennstoff mehr vorhanden ist. Wir vernachlässigen bei unseren Berechnungen auch die Masse der „Stahlhülle" des Antriebsaggregats der Rakete wie überhaupt das gesamte Mehrstufenprinzip von Trägerraketen. Außerdem tritt an dieser Stelle im PAP ein Schönheitsfehler auf, da durch die Betrachtung in Δt-Schritten eine geringe negative Brennstoffmasse auftreten kann, was natürlich Unsinn ist. Mit der Anzeige dieses letzten Werts auf dem Bildschirm sehen wir aber, ob wir annähernd die gewünschte Geschwindigkeit erreicht haben.
Sofern noch Brennstoffmasse vorhanden ist, wird im Programm gefragt, ob t_i ganzzahlig ist. Wenn t_i ganzzahlig ist, also 1, 2, …, s, dann werden die errechneten Werte auf dem Bildschirm angezeigt. Damit wird unsere Bildschirmdarstellung übersichtlicher, da wir nur jeden zehnten Berechnungswert anzeigen. Zu einer Anzeigezeile gehören folgende Ausgaben, die über ein Unterprogramm realisiert werden:

Verstrichene Zeit t_{i+1}, noch vorhandene Brennstoffmasse $m_{i+1} - m_i$, Entfernung von der Erdoberfläche $r_{i+1} - r_0$, erreichte Geschwindigkeit v_{i+1}.

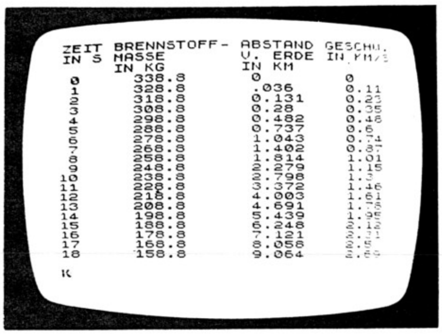
Aus dem soeben beschriebenen Programmablaufplan entstand das BASIC-Programm 5. Die Abfrage der Ganzzahligkeit von t bereitete uns, genauer unserem BASIC-Interpreter, etwas Schwierigkeiten (Programmzeile 250). Ursache dafür ist die interne Darstellung von reellen und natürlichen Zahlen. Die bei reellen Zahlen auftretenden Schutzstellen (bei einem 8stelligen Interpreter z. B. die 9. Stelle) werden

```
  10 REM RAKETENSTART
  20 LET F=6.67E-20: LET ME=5.97
3E24: LET R0=6378: LET R=R0
  30 LET VS=5: LET V=0: LET T=0:
 LET DT=.1
  40 LET U=10: LET FI=0: LET AL=
PI/4: LET Z=1
  50 INPUT "SATELLITENMASSE IN K
G= ";MS
  60 INPUT "SATELLITENGESCHWINDI
GKEIT IN KM/S= ";VE
  70 LET M=MS+MS*(EXP (VE/VS)-1)
  80 LET VX=V*COS (AL): LET VY=V
*SIN (AL)
  90 LET X=R*COS (FI): LET Y=R*S
IN (FI)
 100 PRINT "ZEIT BRENNSTOFF- ABS
TAND GESCHW."
 110 PRINT "IN S MASSE";TAB (17)
;"V. ERDE IN KM/S"
 120 PRINT TAB (5);"IN KG";TAB (
17);"IN KM"
 130 GO SUB 500
 140 LET DX=(U*VS*COS (AL)/M+F*M
E*COS (PI-FI)/(R*R))*DT
 150 LET DY=(U*VS*SIN (AL)/M+F*M
E*SIN (PI+FI)/(R*R))*DT
 160 LET VX=VX+DX: LET VY=VY+DY
 170 LET AL=ATN (VY/VX)
 180 LET V=SQR (VX*VX+VY*VY)
 190 LET X=X+VX*DT: LET Y=Y+VY*D
T
 200 LET FI=ATN (Y/X)
 210 LET R=SQR (X*X+Y*Y)
 220 LET M=M-U*DT
 230 LET T=T+DT
 240 IF M<=MS THEN GO SUB 500: S
TOP
 250 IF Z=INT (INT (T*10+.5)/10)
 THEN GO SUB 500: LET Z=Z+1
 260 GO TO 140
 500 REM UP ANZEIGE
 510 REM RUNDEN
 520 LET RM=INT ((M-MS)*10+.5)/1
0
 530 LET RR=INT ((R-R0)*10↑3+.5)
/10↑3
 540 LET RV=INT (V*100+.5)/100
 550 PRINT TAB (2-LEN (STR$ (INT
 (T))));T;
 560 PRINT TAB (10-LEN (STR$ (IN
T (RM))));RM;
 570 PRINT TAB (19-LEN (STR$ (IN
T (RR))));RR;
 580 PRINT TAB (28-LEN (STR$ (IN
T (RV))));RV
 590 RETURN
```

auf dem Bildschirm nicht mit angezeigt, kommen aber bei logischen Entscheidungen $\geqq$, $>$, $<$, $\leqq$ und $=$ mit zur Wirkung. Wir haben uns mit Rundung des t-Wertes und der Einführung einer Hilfsvariablen Z helfen müssen. Andere Interpreter können durchaus auch anders reagieren. Einfacher wird die Sache, wenn der Interpreter die wahlweise Vereinbarung von natürlichen und reellen Zahlen erlaubt, aber das bieten einfache Interpreter von Kleincomputern nur selten. Auch bei dem Anzeigeunterprogramm ab Zeile 500 haben wir einige Tricks angewandt. So werden in den Zeilen 520 bis 540 die Ergebnisse sinnvoll gerundet, um den Bildschirm nicht mit Zahlenkolonnen vollzustopfen, die bei unserer Näherungsrechnung ohnehin eine falsche Genauigkeit vorgaukeln würden. Die etwas kompliziert erscheinende Ausgabe in den Zeilen 550 bis 580 sorgt für eine kommabündige Darstellung. Wenn Ihr BASIC-Interpreter die PRINT-USING-Anweisung hat, dann können Sie ,,beide Fliegen" mit einer Klappe und viel einfacher schlagen.

Zur praktischen Anwendung des hier vorgestellten Programms wollen wir an den 4. 10. 1957 zurückdenken. An diesem Tag startete die UdSSR den ersten Erdsatelliten Sputnik 1. Seine geringste Entfernung von der Erdoberfläche (Perigäumshöhe) betrug 228 km, die größte (Apogäumshöhe) 947 km. Wir haben mit dem Satellitenbahnprogramm aus dem vorigen Abschnitt ,,etwas gespielt" und herausgefunden, daß dies etwa einer Fluggeschwindigkeit von 8,1 km/s (also eine ganz ,,schwache" Ellipse) entspricht. Die Frage ist nun, ob wir mit unserer ,,Programmrakete" Sputnik 1 auf eine Erdumlaufbahn bringen können, die ungefähr den genannten Bedingungen entspricht. Die uns zur Verfügung stehende Schubkraft beträgt nämlich nur schmächtige 50 kN (10 kg/s · 5000 m/s). Die UdSSR benutzte damals schon eine zweistufige Standardträgerrakete, bei der allein die vier Triebwerke der ersten Stufe zusammen eine Schubkraft von 38,2 MN haben können. Die zweite Stufe liefert immerhin noch maximal 980 kN Schubkraft. Für größere Massen und höhere Bahngeschwindigkeiten werden dreistufige Trägerraketen eingesetzt. Für Planetensonden (die also die Erdumlaufbahn verlassen) sind dann schon vierstufige Trägerraketen erforderlich.

Um Sputnik 1 in eine Erdumlaufbahn zu bringen, geben wir in das BASIC-Programm 5 die Masse m_s = 83,6 kg und die gewünschte Fluggeschwindigkeit v_e = 8,1 km/s ein. Bild 25 zeigt als Bildschirmfoto die wichtigsten Flugdaten für die ersten 18 Sekunden vom Start. Die Rakete hat sich rund 9 km von der Erdoberfläche entfernt. Ihre Geschwindigkeit beträgt aber erst 2,69 km/s. Das Wörtchen ,,erst" ist natürlich astronomisch gemeint, denn das sind fast 10000 km/h. Wir verfolgen den Raketenflug auf dem Bildschirm weiter und stellen fest, daß nach 33 s Flugzeit nur noch



ZEIT IN S	BRENNSTOFF-MASSE IN KG	ABSTAND V. ERDE IN KM	GESCHW. IN KM/S
0	338.8	0	0
1	328.8	.036	0.11
2	318.8	0.131	0.23
3	308.8	0.28	0.35
4	298.8	0.482	0.48
5	288.8	0.737	0.6
6	278.8	1.043	0.74
7	268.8	1.402	0.87
8	258.8	1.814	1.01
9	248.8	2.279	1.15
10	238.8	2.798	1.3
11	228.8	3.372	1.46
12	218.8	4.003	1.61
13	208.8	4.691	1.78
14	198.8	5.439	1.95
15	188.8	6.248	2.12
16	178.8	7.121	[illegible]
17	168.8	8.058	2.5
18	158.8	9.064	[illegible]

K

Bild 25. Die ersten Flugsekunden von Sputnik 1

9,8 kg Raketenbrennstoff vorhanden sind. Der Abstand von der Erde beträgt 35,212 km, und die Geschwindigkeit hat einen Wert von 7,44 km/s erreicht. Nach 33,9 s bricht das Programm mit einer (unsinnigen) negativen Brennstoffmasse von 200 g ab. Die Geschwindigkeit beträgt jetzt 7,95 km/s. Wir müßten die Schrittweite Δt feiner wählen, um noch näher an den geplanten Wert von 8,1 km/s heranzukommen. Arbeitet man z. B. mit einer Zeitdifferenz von $\Delta t = 0{,}01$ s, dann ergibt sich nach 33,9 s eine Geschwindigkeit von 8,02 km/s. Allerdings muß man für diese Berechnung etwas Geduld aufbringen, das Prinzip wird aber auch schon bei der groben Berechnung mit $\Delta t = 0{,}1$ s klar. Unsere Rakete reicht demnach, unter Beachtung aller von uns gemachten Vereinfachungen, für den Start von Sputnik 1 aus. Schade ist nur, daß wir die Perigäumshöhe von 228 km nicht erreicht haben.

Was geschieht aber nun, wenn ein bemanntes Raumfahrzeug mit einer Masse von 6500 kg auf eine Erdumlaufbahn gebracht werden soll? Hier versagt unsere Rakete auf Grund mangelnder Schubkraft. Auf dem Bildschirm erscheinen (unsinnige) negative Abstände von der Erde, und die Geschwindigkeit geht, sofern sie überhaupt eine Zeitlang anwuchs, wieder zurück. Soll mit dem BASIC-Programm ein Raumfahrzeug Sojus (6500 kg) auf eine Erdumlaufbahn mit

einer Geschwindigkeit von 8,1 km/s gebracht werden, so ist etwa eine Schubkraft von 1,25 MN (z. B. $u = 50$ kg/s und $v_s = 25$ km/s) erforderlich. Werden auch noch die Startwinkel φ und α variiert, dann können wir uns schon fast als Mitarbeiter in einem Raumfahrtzentrum fühlen. Aber eben nur „fast“, denn in Wirklichkeit ist das alles viel komplizierter, und wer wollte schon durch Näherungsrechnungen Menschen und Material aufs Spiel setzen. Zugleich steigt damit aber auch unsere Achtung vor den Leuten, die in den Raumfahrtzentren mit Großrechnern arbeiten, und besonders vor denen, die nur mit Feder und Papier die Grundlagen dazu schufen.

3.4. Kepler und die Astrologie

Johannes Kepler wurde, wie schon erwähnt, am 27. Dezember 1571 nachmittags 2.30 h in der schwäbischen Reichsstadt Weil der Stadt geboren. Ort und Zeit sind verbürgt, denn Kepler hat schon 1597 sein eigenes Horoskop aufgestellt und interpretiert. Es beginnt mit dem sehr zutreffenden Satz: „Dieser Mensch ist von Geburt dazu bestimmt, seine Zeit mit schwierigen Dingen zu verbringen, vor denen andere zurückschrecken.“ Wenn man das Lebenswerk Keplers betrachtet, erkennt man, daß er uns sehr viele bedeutende und richtungweisende Gedanken hinterlassen hat. Und das unter beständiger Geldnot und in den Wirren des Dreißigjährigen Krieges. In vielen Werken äußerte er sich über Wahrheit und Trug der Astrologie, z. B. auch im 7. Kapitel des 4. Buches der „Weltharmonik“. Er erwähnt dort das Horoskop seiner Mutter, „eine Frau, die fast unter den gleichen Aspekten geboren ist“ wie er selbst. „Sie ist von unruhigem Geist, erreicht damit aber nicht nur nichts auf wissenschaftlichem Gebiet (was bei einer Frau nicht verwunderlich ist), sondern bringt auch ihre ganze Gemeinde in Aufregung und ist sich selbst Urheberin beklagenswerten Elends.“

Kepler faßt den Menschen als Teil der Erde und des Kosmos auf und ist davon überzeugt, daß der Kosmos den Menschen beeinflußt. Da der Einfluß von der Stellung von Sonne, Mond und Sternen abhängt, muß diese Konstellation genau bestimmt werden. Dadurch gibt es aber auch nicht zwei übereinstimmende Horoskope. Aber im sich ständig ändernden Kosmos, im Kreisen und Schwingen der Sterne, dem

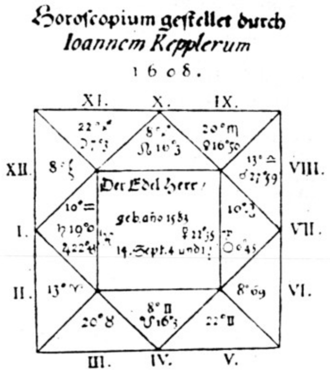


Bild 26. Das erste Horoskop Wallensteins, von Kepler 1608 aufgestellt

unterschiedlichen Einfluß auf den Menschen liegt für Kepler die Berechtigung der Astrologie. Kepler hat wesentlich zur Aufstellung von Horoskopen beigetragen, indem er die mathematische Beschreibung der Planetenbahnen aufstellte und die exakten Stellungen der Sterne im Kosmos zum Menschen in seiner Geburtsstunde oder irgendwann in seinem Leben angeben konnte. In der Deutung der Horoskope, in der Art der Interpretation unterscheidet sich Kepler allerdings nicht nur von seinen Zeitgenossen. Kepler gilt vielfach als ein Verächter der Astrologie, aber er hatte wohl kein gestörtes Verhältnis zur Astrologie. Der fünfundfünfzigjährige Kepler schreibt am 6. April 1627 in einem Brief an Matthias Bernegger zu einer Zeit, als ihn Geldsorgen wieder einmal außerordentlich bedrückten, daß er auch einen Lehrstuhl oder eine außerordentliche Professur für Astrologie annehmen würde.

„Wenn es genügend Studenten gibt, würde ich meine Zuflucht zur Amme der Astronomie, also zur Astrologie, nehmen. Ich würde jeden Studenten nach seiner Geburtsstundefragen und es übernehmen, nicht nur das Verfahren zur

Berechnung der Planetenörter, sondern auch die Bedeutung ihrer Eigenschaften zu lehren."

Vom 26. Juli 1628 bis zum 8. Oktober 1630 lebte und arbeitete Kepler in Sagan am Hofe von Wallenstein, der zu dieser Zeit einer der mächtigsten Männer war. Wallenstein hatte zwar, wie die Kreuzworträtsel lehren, seinen eigenen Hausastrologen, den Italiener Giovanni Baptista Seni, versprach sich aber von Kepler weitaus mehr. Bereits im Jahre 1608 hatte sich Wallenstein das Horoskop von Kepler stellen lassen (Bild 26). Diese erste Horoskopdeutung hat Wallenstein im Laufe der Jahre immer wieder überprüft und mit eigenhändigen Bemerkungen versehen. Nun bittet er Kepler erneut um sein Horoskop. Er möchte Einzelheiten über sein Leben, über Glück und Unglück erfahren, seine Todesursache wissen, wann und wo er sterben würde und seine Freunde und Feinde kennen. Kepler weist derartige Ansinnen mit scharfen Worten zurück, denn wer so fragt, ist „noch nie recht in die Schul gegangen und hat das Licht der Vernunft, das ihm Gott angezündet, noch nie recht geputzet; und wenn er nur mit Fleiß nachsinnen würde, wird er finden, daß diese Fragen, beides zu erörtern und auch vorzulegen, eine recht unsinnige Weise sei". „Die Philosophia und also auch die wahre Astrologie ist ein Zeugnis Gottes und also ein heilig und gar nicht leichtfertig Ding. Das will ich für meinen Teil nicht vermehren."

Kepler betrachtet das Leben und die irdischen Ereignisse immer erst als Folge des Zusammenwirkens von himmlischen Konstellationen und irdischen Gegebenheiten. „Die Sterne zwingen nicht, sie machen nur geneigt." (Zitate aus Hemleben: Johannes Kepler, rororo 1971).

Die Astrologiegläubigkeit bis zum Astrologiefatalismus reicht bis in die heutige Zeit, mehr oder weniger ausgeprägt. Das Kreisen der Gestirne, das Auf und Ab der Planeten, des Mondes und der Sonne wird mit dem Auf und Ab im Leben in Verbindung gebracht. Bestimmen doch Tag und Nacht, Sommer und Winter entscheidend unser Leben und unseren Lebensrhythmus; und jeder Mensch erkennt zwischen Arbeit und Erschöpfung seine Biorhythmen. So hat einer der beiden Autoren dieses Buches in den Wintermonaten seine Zeit der schöpferischen Tätigkeit und seine Schreibphase, während der andere im Dezember und Januar seinen wissenschaftlichen Winterschlaf halten muß. Die Zusammenarbeit ist dadurch erschwert, aber keinesfalls unmöglich. Das folgende Beispiel sollte deshalb nicht zu ernst genommen und der Grundsatz von KEPLER immer beachtet werden: „Die Sterne zwingen nicht, sie machen nur geneigt."

Nach der Theorie der Biorhythmen soll es im menschlichen Leben drei beherrschende, sich immer wiederholende Vorgänge geben. Mit dem Geburtstag, dem Tag der Geburt, begann

- der physische Zyklus mit einer Periode von 23 Tagen,
- der emotionale Zyklus mit einer Periode von 28 Tagen und
- der geistige Zyklus mit einer Periode von 33 Tagen.

Der periodische Verlauf der Zyklen kann dargestellt werden durch eine trigonometrische Funktion $y = \sin t$. Der Funktionswert y gibt dann für jeden Tag t im Leben die Werte für den jeweiligen Biorhythmus an. Die Funktionswerte y liegen zwischen $+1$ und -1, und die positiven Werte geben die „guten Tage" und die negativen Werte die „schlechten Tage" an. Wenn alle drei Werte $+1$ sind, so wäre der Tag sicherlich ein Supertag, geeignet, „große Entscheidungen" zu treffen und „nicht zu zögern". Wie viele solche „supergute Tage" gibt es wohl im Leben, das, wenn es hoch kommt, 80 Jahre währt?

Die Funktionswerte können ausgerechnet werden nach der allgemeinen Gleichung

$$y = \sin\left(2\pi \frac{\text{Anzahl der Tage seit der Geburt}}{\text{Anzahl der Tage im Zyklus}}\right)$$

Wenn auch die Theorie des Biorhythmus eine äußerst fragwürdige und in der Fachliteratur widerlegte Angelegenheit ist, so läßt sich daraus doch ein exaktes BASIC-Programm machen. Dies als Mahnung für alle, die eine „wacklige" Theorie mit dem exakten Computer und einem gehörigen Schuß Zahlengläubigkeit untermauern wollen. Zur Ermittlung der Biorhythmen werden zwei Programmteile benötigt. Der eine muß die Anzahl der Lebenstage von der Geburt bis zum gewünschten Datum ermitteln. Solche ewigen Kalender gibt es auch als Beilagen zu Taschenkalendern, mit deren Hilfe man den Wochentag eines beliebigen Datums bestimmen kann. Der zweite Programmteil wird dann für die drei Zyklen mit Hilfe der Sinusfunktion die Zahlenwerte zwischen $+1$ und -1 ermitteln.

Für die Bestimmung der Anzahl der Tage zwischen zwei Kalenderdaten gibt es verschiedene Algorithmen. Am

BASIC-Programm 6. BIORHYTHMUS

```
  10 REM BIORHYTHMUS
  20 PRINT "ALLE WERTE ALS ZAHLE
N EINGEBEN!": PRINT
  30 INPUT "GEBURTSTAG= ";GT
  40 INPUT "GEBURTSMONAT= ";GM
  50 INPUT "GEBURTSJAHR= ";GJ
  60 IF GJ<1901 THEN GO TO 50
  70 INPUT "GEUUENSCHTER TAG= ";
WT
  80 INPUT "GEUUENSCHTER MONAT=
";WM
  90 INPUT "GEUUENSCHTES JAHR= "
;WJ
 100 IF WJ>2100 THEN GO TO 90
 110 PRINT "IHRE DATEN:"
 120 PRINT "GEBURTSDATUM= ";GT;"
.";GM;".";GJ
 130 PRINT "UUNSCHDATUM= ";WT;".
";WM;".";WJ: PRINT
 140 LET T=GT: LET M=GM: LET J=G
J
 150 GO SUB 400
 160 LET TA=F
 170 LET T=WT: LET M=WM: LET J=W
J
 180 GO SUB 400
 190 LET TA=F-TA: REM TA=ANZAHL
DER TAGE
 200 LET ZY=23: GO SUB 500
 210 LET PH=KU
 220 LET ZY=28: GO SUB 500
 230 LET EM=KU
 240 LET ZY=33: GO SUB 500
 250 LET IN=KU
 260 PRINT "ERGEBNISSE (-1 BIS +
1):"
 270 PRINT "PHYSIS= ";PH
 280 PRINT "EMOTIO= ";EM
 290 PRINT "INTELLEKT= ";IN
 300 STOP
 400 REM UP DATENFAKTOR F
 410 LET F=T+J*365
 420 IF M<3 THEN GO TO 450
 430 LET F=F-INT (M*.4+2.3)
 440 LET J=J+1
 450 LET F=F+M*31+INT ((J-1)/4)
 460 RETURN
 500 REM UP KURVENBERECHNUNG
 510 LET KU=SIN (2*PI*TA/ZY)
 520 LET KU=INT (KU*100+.5)/100
 530 RETURN
```

stattlichsten sind solche, deren Gültigkeit im Jahre 1582 beginnt, als der Gregorianische Kalender eingeführt wurde. Sie gelten auch weit über unser Jahrtausend hinaus. Wir haben für unser Programm eine einfache Variante gewählt, die nur von 1901 bis zum Jahre 2100 Gültigkeit hat. Das dürfte für interessierte Leser wohl ausreichend sein, sofern wir von den Uralteinwohnern im Kaukasus einmal absehen. Damit sind wir schon mitten in unserem BASIC-Programm (Programm 6). In den Zeilen 30 bis 130 werden die erforderlichen Daten eingegeben und auf dem Bildschirm ange-

zeigt. Für das Geburtsdatum und das gewünschte Datum wird jeweils ein Datenfaktor ermittelt, aus denen dann die Anzahl der Lebenstage bis zum gewünschten Datum ermittelt werden kann. Die Ermittlung der Datenfaktoren F erfolgt in einem Unterprogramm, das also zweimal aufgerufen wird. In Zeile 190 liegt dann die Anzahl der Tage TA vor. Die Berechnung der drei Biorhythmuswerte erfolgt ebenfalls in einem Unterprogramm, das insgesamt dreimal aufgerufen wird. Damit ist dieses BASIC-Programm ein schönes Beispiel für die Anwendung der Unterprogrammtechnik. Hier wird auch der Nachteil der Programmiersprache BASIC deutlich, für Unterprogramme keine extra Variablen vereinbaren zu können. Deshalb sind die Zuweisungszeilen 140, 160, 170, 210, 230 und 250 erforderlich. In den Zeilen 260 bis 290 werden schließlich die Ergebnisse auf dem Bildschirm angezeigt.
Als Beispiel soll ein bedeutsamer Tag im Leben Werner Heisenbergs betrachtet werden. Heisenberg wurde am 5. 12. 1901 geboren und am 1. 10. 1927 zum ordentlichen Professor für Theoretische Physik an die Universität Leipzig berufen. Für diesen Tag liefert unser Programm außerordentlich traurige Ergebnisse: Physis = 0,27; Emotio = —0,9 und Intellekt = —0,97. Dieser Tag scheint aber keinerlei Maßstäbe gesetzt zu haben, denn zusammen mit Debye, der Direktor des Physikalischen Institutes wurde, entwickelte sich Leipzig in den Folgejahren zu einem erfolgreichen physikalischen Zentrum mit vielen berühmt gewordenen Schülern. Deshalb schmunzeln Sie bitte dabei, wenn Sie das Programm benutzen sollten.

3.5. Kepler und die Faßregel

Von Kurt Tucholski soll die satirische Bemerkung stammen, daß es der deutsche Kleingärtner am liebsten sähe, wenn sein Kleingarten auch von einer quadratischen Sonne beschienen würde. Aber die Kleingärten sind in den meisten Fällen nicht quadratisch, haben meistens sogar krummlinige Begrenzungen. Kaufpreis oder Pacht werden je Quadratmeter berechnet. So stellt sich die Aufgabe, den Inhalt einer krummlinig begrenzten Fläche zu bestimmen. Die Aufgabe kann in der Geschichte der Mathematik auf ein respektables Alter verweisen. Von der Exhaustionsmethode des Archimedes, Cavallieris Bemühungen und über die Keplersche Faßregel hat die Flächenberechnung schließlich zur Integralrechnung geführt, verbunden mit den Namen von Newton und Leibniz. Die Aufgabe besteht darin, ein bestimmtes Integral, wenigstens näherungsweise, zu berechnen. Der Wert des bestimmten Integrals

$$F(a, b) = \int_a^b f(x)\,dx$$

entspricht der Fläche zwischen der Kurve der Funktion $f(x)$ und der x-Achse in den Grenzen von a bis b. Das bestimmte Integral ist definiert als Grenzwert einer Summe, und die Näherungsformel beschränkt sich auf eine endliche Anzahl von Summengliedern.
Die vorgegebene Funktion $f(x)$ sei im abgeschlossenen Intervall $a \leqq x \leqq b$ stetig, und vereinfachend wird angenommen, daß die Funktionswerte stets wachsen. Das Intervall $\langle a,b \rangle$ wird in n gleiche Teile der Breite h unterteilt. Die Ordinatenwerte der jeweils um h wachsenden Abszissenwerte sind

$$f(a) = y_a, \quad f(a + \nu h) = y_\nu, \quad f(b) = y_b$$
$$(\nu = 1, 2, \ldots, n - 1)$$

Der Wert des bestimmten Integrals, also die Fläche unter der Kurve der Funktion $f(x)$, liegt zwischen dem inneren Polygon p und dem äußeren Polygon P (Bild 27).

$$p = h\,(y_a + y_1 + y_2 + \ldots + y_{n-1})$$
$$P = h\,(y_1 + y_2 + \ldots + y_{n-1} + y_b)$$

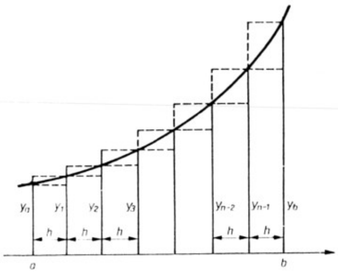


Bild 27. Zur Ableitung der Trapezformel

Der arithmetische Mittelwert aus p und P ergibt bereits eine Näherungsformel für das bestimmte Integral, die als Trapezformel A_T bezeichnet wird.

$$A_T = \frac{p+P}{2} = h\left(\frac{y_a + y_b}{2} + y_1 + y_2 + \ldots + y_{n-1}\right)$$

$$\text{mit} \quad h = \frac{b-a}{n}$$

Die Trapezformel gibt die Summe aller Trapeze an, die entstehen, wenn die Kurve $f(x)$ durch ein Sehnenpolygon ersetzt wird. Die Trapezformel A_T liefert oft schon sehr genaue Werte des bestimmten Integrals.

Eine weitere Näherungsformel wird als Tangentenformel A_U bezeichnet. Man unterteilt das Intervall $\langle a,b \rangle$ in eine gerade Anzahl von $n = 2m$ Streifen und benutzt zur Aufstellung der Näherungsformel Rechtecke, begrenzt durch zwei Ordinatenwerte im Abstand $2h$. An dem in der Mitte dazwischen liegenden Ordinatenwert wird die Tangente an die Kurve gelegt, so daß eine gerade Anzahl von Streifen notwendig ist (Bild 28).

$$A_U = 2h\,(y_1 + y_3 + y_5 + \ldots + y_{2m-1})$$

$$\text{mit} \quad h = \frac{b-a}{2m}$$

Durch die Näherungsformel A_U wird die Fläche aller Trapeze angegeben, die eine Breite von $2h$ besitzen und von den Kurventangenten in den Punkten y_1, y_3, y_5, ... begrenzt

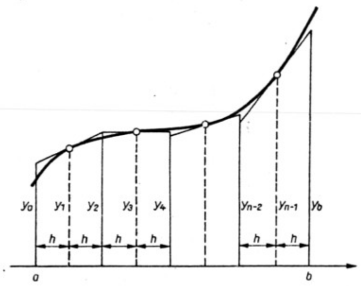


Bild 28. Zur Ableitung der Tangentenformel

werden. Auch die Tangentenformel A_U ergibt oft schon sehr genaue Werte des bestimmten Integrals.

Eine weitere Nährungsformel, die wesentlich genauer ist und damit die größte Bedeutung hat, geht aus der Trapezformel A_T und der Tangentenformel A_U durch eine weitere Mittelwertbildung hervor. In der Trapezformel A_T wurden doppelt so viele Streifen (mit der Breite h) zur Berechnung herangezogen wie in der Tangentenformel A_U. Man nimmt nun auch an, daß der Näherungswert, nach A_U berechnet, doppelt so genau ist wie der Näherungswert, nach A_S berechnet. Daraus ergibt sich die Simpsonsche Näherungsformel A_S zur Berechnung eines bestimmten Integrals.

$$A_S = \frac{2A_T + A_U}{3} =$$

$$\frac{h}{3}\,(y_a + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + 2y_4 + \ldots + 4y_{2m-1} + y_b)$$

$$\text{mit } h = \frac{b-a}{2m}$$

Der einfachste Fall ist $m = 1$ und $h = \frac{b-a}{2}$. Das Intervall $\langle a,b \rangle$ wird also lediglich halbiert. Man erhält als Näherungsformel

$$A_K = \frac{h}{3}\,(y_a + 4y_1 + y_b) \quad \text{mit} \quad h = \frac{b-a}{2}$$

Diese Näherungsformel wurde von Johannes Kepler bereits im 17. Jahrhundert angegeben und wird als Keplersche Faßformel bezeichnet.

Die wiederholte Anwendung auf je zwei benachbarte Streifen der Breite $h = \frac{b-a}{2m}$ führt von der Keplerschen Faßformel wieder zur Simpsonschen Näherungsformel.

Eine sehr wichtige Frage bei Näherungsformeln ist ihre Genauigkeit. Die Abweichung des bestimmten Integrals vom berechneten Näherungswert wird als Rest R bezeichnet. Für die Abschätzung des Fehlers werden Formeln angegeben, auf deren Ableitung nicht eingegangen wird.

Bei Anwendung der Keplerschen Faßformel ergibt sich ein Fehler von

$$R_K = -\frac{(b-a)^5}{2880}\,f^{(4)}(\eta)$$

und bei Anwendung der Simpsonschen Näherungsformel

$$R_S = -\frac{(b-a)^5}{2880\,m^4}\,f^{(4)}(\eta)\,.$$

Aus den Formeln R_S und R_K geht hervor, daß beide Fehler für Parabeln bis zur dritten Ordnung den Wert Null haben. Der Ausdruck $f^{(4)}(\eta)$ ist nämlich ein Funktionswert der 4. Ableitung der Funktion $f(x)$ an der Stelle η, die im Intervall (a,b) liegt ($a<\eta<b$). Für Parabeln bis zur 3. Ordnung ist die vierte Ableitung identisch Null, so daß auch der Fehler R den Wert Null annimmt. Mit der Verdoppelung von $n = 2m$, der Anzahl der zur Berechnung herangezogenen Streifen mit der Breite h im Intervall $\langle a,b\rangle$, wird der Fehler R erheblich kleiner. Da m in der 4. Potenz in die Formel eingeht, wird der Fehler um den Faktor $\left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{16}$ verringert.

Die Simpsonsche Näherungsformel wird nun auf die Berechnung des bestimmten Integrals

$$F = \int_1^2 \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x \quad \text{angewendet}.$$

Das Intervall $1 \leqq x \leqq 2$ wird in $n = 2m = 10$ Teile unterteilt mit der Streifenbreite $h = \frac{b-a}{n} = 0{,}1$.

Mit den beiden Summen u und g wird die Rechnung erleichtert.

$$u = y_1 + y_3 + y_5 + \dots + y_{2m-1}$$
$$g = y_2 + y_4 + y_6 + \dots + y_{2m-2}$$

Damit ergeben sich die Näherungsformeln

$$A_T = h\left(\frac{y_a + y_b}{2} + u + g\right)$$
$$A_U = 2hu$$
$$A_S = \frac{h}{3}(y_a + 4u + 2g + y_b)$$

Zunächst müssen im Abstand von $h = 0{,}1$ die Ordinatenwerte der Funktion $f(x) = \frac{1}{x}$ berechnet werden. Aus der Tabelle 4 können alle Werte zur Berechnung von A_T, A_U, A_S und A_K entnommen werden.

Für die Berechnung der Fläche mit Hilfe der Keplerschen Faßformel A_K wird das Intervall $\langle a,b\rangle$ nur einmal halbiert. Damit ergibt sich

für $h = \frac{b-a}{2} = 0{,}5$,

und

für $x_1 = 1{,}5$ folgt $y_1 = \frac{1}{x_1} = 0{,}\bar{6}$

Tabelle 4. Berechnung des bestimmten Integrals $\int_1^2 \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$

x	$y = \frac{1}{x}$	Bezeichnung
1,0	1	y_a
1,1	$0{,}\overline{90}$	y_1
1,2	$0{,}8\overline{3}$	y_2
1,3	0,7692307692	y_3
1,4	0,7142857143	y_4
1,5	$0{,}\overline{6}$	y_5
1,6	0,625	y_6
1,7	0,5882352941	y_7
1,8	$0{,}\overline{5}$	y_8
1,9	0,5263157895	y_9
2,0	0,5	y_b

$u = y_1 + y_3 + \dots + y_9 = 3{,}459\,539\,429$
$g = y_2 + y_4 + \dots + y_8 = 2{,}7\,228\,174\,603$
$y_a + y_b = 1{,}5$

$A_T = 0{,}6\,937\,568\,893$
$A_U = 0{,}6\,919\,078\,858$
$A_S = 0{,}6\,931\,502\,307$
$A_K = 0{,}694$

Daraus folgt für die Fläche A_K

$$A_K = \frac{0{,}5}{3}\left(1 + 4\cdot 0{,}\bar{6} + 0{,}5\right).$$

Mit

$$f(x) = \frac{1}{x} \quad \text{und} \quad f^{(4)} = \frac{24}{x^5}$$

lassen sich die Fehler berechnen

$$R_K = -\frac{1}{2880}\cdot\frac{24}{\eta^5} = -8{,}3\cdot 10^{-3}\,\eta^{-5}$$

$$R_S = -\frac{1}{2880\cdot 5^4}\cdot\frac{24}{\eta^5} = -1{,}3\cdot 10^{-5}\,\eta^{-5}$$

mit $1 < \eta < 2$.

Der wahre Wert des bestimmten Integrals ist

$$A = \int_1^2 \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \ln 2 \approx 0{,}6931471806\,,$$

so daß man hiermit die Näherungswerte und Fehlerabschätzungen vergleichen kann. Dabei liefert die Keplersche Faßformel A_K als „Sparvariante" noch ein erstaunlich gutes Ergebnis.
Solche Näherungsverfahren sind für den Computer ein ideales Anwendungsgebiet. Hier kann ein Ablauf, der einmal programmiert wurde, so oft wiederholt werden, bis die gewünschte Genauigkeit erreicht ist. Da auch der Kleincomputer relativ schnell ist, macht es ihm nichts aus, bei der Simpsonschen Näherungsformel mit 10 oder 20 Intervallen zu rechnen. So liefert bei 10 Intervallen ein achtstelliger BASIC-Interpreter nach 1 s für das Integral $\int_1^2 \frac{1}{x}\mathrm{d}x$ den Wert 0,69315023. Damit stimmt das Ergebnis auf 4 Stellen mit dem wahren Wert von ln 2 überein. Erhöht man die Intervallanzahl auf 60, so wird nach 3 s Rechenzeit der auf 8 Stellen genaue Wert für ln 2 geliefert (Bild 29).
Bei Funktionen, deren Kurve die x-Achse schneidet, müssen sehr feine Intervallteilungen vorgenommen werden, um ausreichende Genauigkeiten zu erreichen. Die Fläche unterhalb der x-Achse wird negativ, und das Integral ergibt sich dann aus der algebraischen Summe der Flächen, die auf beiden Seiten der x-Achse liegen. Bei mehreren Nullstellen und einem relativ großen Integrationsbereich kann es erforderlich sein, den Bereich in 300, 500 oder gar 1000 Intervalle einzuteilen. Für 300 Intervalle benötigt der Kleincomputer für eine trigonometrische Funktion rund 30 s.

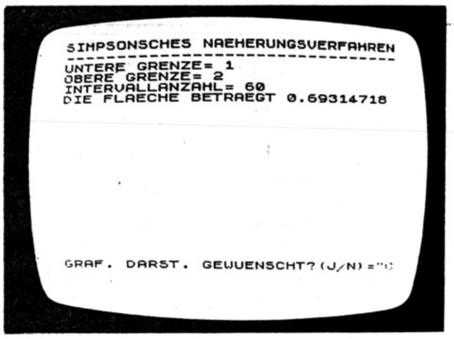


Bild 29. Simpsonsches Näherungsverfahren

Das BASIC-Programm dazu zeigt Programm 7. Es wurde so gestaltet, daß der Computer im Bildschirmdialog alle notwendigen Eingabegrößen abfordert. In den Programmzeilen 20 bis 40 wird die Eingabe der zu integrierenden Funktion realisiert. Da wir die Überschrift mit Unterstreichung noch ein zweites Mal benötigen, stellen wir sie als Unterprogramm auf den Programmzeilen 300 bis 330 dar. Wir brauchen sie deshalb zweimal, weil durch den Übergang in den Programmiermodus zur Eingabe der Funktion der Bildaufbau gestört wird und wir deshalb für die Ausgabe eines ordentlichen Ergebnisbildes wieder von neuem mit der Überschrift beginnen. Nach Abarbeitung der Programmzeile 40 hält der Computer durch die Anweisung STOP an. Jetzt muß gemäß Aufforderung die zu integrierende Funktion auf die Programmzeile 1000 gebracht werden. Dabei sind die Variablenbezeichnungen X und Y unbedingt einzuhalten. Die Funktionsgleichung muß die Programmzeile 1000 belegen, während auf 1010 schon über das Programm die RETURN-Anweisung geladen wurde. Damit enthalten die Programmzeilen 1000 und 1010 die Funktionsgleichung in Form eines Unterprogramms. Das wird sich später als vorteilhaft erweisen.
Wenn die Funktionsgleichung in den BASIC-Programmspeicher eingebracht wurde, erfolgt die Fortsetzung der Programmabarbeitung durch das Kommando CONT. Falls Ihr Interpreter jetzt nicht bereit ist, weiterzuarbeiten, hätten Sie nach Zeile 40 die BREAK-Taste drücken müssen. Daraufhin wird in Zeile 50 der Bildschirm gelöscht, der nach Eingabe der Funktionsgleichung bestimmte Hinweise und einen Teil des Programmlistings (nach Programmzeilen geordnete Anweisungen des Programms) enthält. In den Zeilen 60 bis 80 werden die untere und obere Grenze des Integrals und die Anzahl der Unterteilungen (Intervalle) eingegeben. Da diese Intervallanzahl beim Simpsonschen Näherungsverfahren nur geradzahlig sein darf, wird in Zeile 90 eine Überprüfung

BASIC-Programm 7. SIMPSON →

```
   10 REM SIMPSON
   20 GO SUB 310: PRINT "GEBEN SI
E NACH DEM MUSTER"
   30 PRINT "1000 LET Y=...(VAR.
X)"
   40 PRINT "DIE FUNKTION EIN,FOR
TS. MIT CONT": STOP
   50 CLS
   60 INPUT "UNTERE GRENZE= ";A
   70 INPUT "OBERE GRENZE= ";B
   80 INPUT "INTERVALLANZAHL (2,4
,6,...)= ";N
   90 IF N/2<>INT (N/2) THEN GO T
O 80
  100 CLS : GO SUB 310
  110 PRINT "UNTERE GRENZE= ";A
  120 PRINT "OBERE GRENZE= ";B
  130 PRINT "INTERVALLANZAHL= ";N
  140 DIM W(N-1): LET Y4=0: LET Y
2=0: LET K=2
  150 LET X=A: GO SUB 1000: LET Y
A=Y
  160 LET X=B: GO SUB 1000: LET Y
B=Y
  170 LET H=(B-A)/N
  180 FOR I=1 TO N-1
  190 LET X=A+I*H. GO SUB 1000
  200 LET W(I)=Y
  210 IF I-K=0 THEN LET Y2=Y2+W(I
): LET K=K+2: GO TO 230
  220 LET Y4=Y4+W(I)
  230 NEXT I
  240 LET FL=H/3*(YA+YB+4*Y4+2*Y2
)
  250 PRINT "DIE FLAECHE BETRAEGT
 ";FL: PRINT
  260 INPUT "GRAF. DARST. GEWUENS
CHT?(J/N)=";F$
  270 IF F$="J" THEN CLS : GO TO
410
  280 STOP
  300 REM UP UEBERSCHRIFT
  310 PRINT "SIMPSONSCHES NAEHERU
NGSVERFAHREN"
  320 FOR I=0 TO 31: PRINT AT 1,I
;"-": NEXT I
  330 RETURN
  400 REM GRAFISCHE DARSTELLUNG
  410 DIM Z(256): IF A>0 THEN LET
PZ=460: GO TO 430
  420 LET PZ=450
  430 FOR P=0 TO 255
  440 LET X=P*((B-A)/255)+A: GO T
O PZ
  450 IF SGN (X)=0 OR SGN (X)=1 T
HEN PLOT P,0: DRAW 0,175: LET PZ
=460
  460 GO SUB 1000: LET Z(P+1)=Y
  470 NEXT P
  480 REM Y-MAX UND Y-MIN ERMITTE
LN
  490 LET GW=Z(1): LET KW=Z(1)
  500 FOR I=2 TO 256
  510 IF Z(I)>GW THEN LET GW=Z(I)
  520 IF Z(I)<KW THEN LET KW=Z(I)
  530 NEXT I
  540 IF GW<0 THEN GO TO 680
  550 IF KW<0 THEN GO TO 620
  560 LET MA=175/GW
  570 LET XP=0: GO SUB 800
  580 FOR P=0 TO 255
  590 PLOT P,MA*Z(P+1)
  600 NEXT P
  610 STOP
  620 LET MA=175/(GW+ABS (KW))
  630 LET XP=MA*ABS (KW): GO SUB
800
  640 FOR P=0 TO 255
  650 PLOT P,MA*(Z(P+1)+ABS (KW))
  660 NEXT P
  670 STOP
  680 LET MA=175/ABS (KW)
  690 LET XP=175: GO SUB 800
  700 FOR P=0 TO 255
  710 PLOT P,MA*(Z(P+1)+ABS (KW))
  720 NEXT P
  730 STOP
  800 REM UP X-ACHSE ZEICHNEN
  810 PLOT 0,XP: DRAW 255,0
  820 PRINT AT 21-INT (XP/8),0; O
VER 1;A
  830 PRINT AT 21-INT (XP/8),32-L
EN (STR$ (B)); OVER 1;B
  840 RETURN
 1000 REM HIER Y=F(X) EINTRAGEN
 1010 RETURN
```


durchgeführt. Wenn die Division durch 2 einen Rest ergibt, dann ist N/2 ungleich dem ganzzahligen Anteil (Anweisung INT) von N/2. Damit liegt eine wahre Aussage vor, und im Programm wird zur Zeile 80 zurückgesprungen. Im anderen Fall, also bei Eingabe eines Vielfachen von 3 für die Intervallanzahl, wird in Zeile 100 fortgesetzt.

Hier wird nach nochmaliger Bildschirmlöschung mit dem Aufbau des endgültigen Ergebnisbilds, wie es Bild 29 zeigt, begonnen. Dazu wird in Zeile 100 die Überschrift mit Unterstreichung als Unterprogramm aufgerufen, und in den Zeilen 110 bis 130 werden die Eingabewerte mit entsprechendem Text dargestellt. Dabei ist zu beachten, daß bei manchen Interpretern die PRINT-AT-Anweisung nicht zur Weiterschaltung der Cursorposition führt. Das eigentliche SIMPSON-Programm umfaßt die Zeilen 140 bis 240. In der Zeile 140 reservieren wir Plätze für eine Variable W, die dann später in Zeile 200 die einzelnen Funktionswerte y an den Intervallgrenzen aufnimmt. Diese Variable W hat einen Index, so daß sich die Abspeicherung von W(1) bis W(N—1), wobei N die Intervallanzahl ist, sehr einfach realisieren läßt. In Zeile 140 werden außerdem die Variablen Y4, Y2 und K auf konstante Werte gesetzt. Das Nullsetzen der Variablen Y4 und Y2 ist nicht erforderlich, da der Programmstart mit dem Kommando RUN ohnehin je nach Interpreter alle Variablen löscht oder mit Null belegt. Das gleiche leistet das Kommando CLEAR. Auch ein Programmstart mit GOTO 10 ist möglich. In diesem Fall behalten alle Variablen ihren Wert, wobei ein zweiter Programmdurchlauf zu Fehlern führen würde. Wir setzen deshalb zur Sicherheit die Variablen Y4 und Y2 auf Null, hätten dafür aber auch CLEAR in das Programm einbauen können.

In Zeile 150 und 160 werden die Funktionswerte y für die untere und obere Grenze des Integrals berechnet. Daraus wird in Zeile 170 die schon vorhin erwähnte Größe h berechnet. In der Laufanweisung, die sich von Zeile 180 bis 230 erstreckt, werden die Funktionswerte y an den einzelnen Intervallgrenzen berechnet. Diese Funktionswerte y werden der Variablen W(I) mit dem entsprechenden Index zugeordnet. In den Zeilen 210 und 220 erfolgt die getrennte Aufsummierung der Funktionswerte mit geradzahligen und ungeradzahligen Indizes. Das entspricht den schon erwähnten Hilfssummen u und g. Übrigens bestimmt diese Laufanweisung maßgeblich die Rechenzeit, denn eine große Intervallanzahl N bedeutet auch eine hohe Zahl von Durchläufen.

In Zeile 240 wird schließlich die Fläche FL aus den bisher ermittelten Größen berechnet. Damit ist die Berechnung abgeschlossen. Wer das SIMPSON-Programm in ein eigenes Anwenderprogramm einbauen möchte, der braucht also nur die Zeilen 140 bis 240 und 1000 bis 1010 zu betrachten. Allerdings muß er noch die Bereitstellung der Variablen A, B und N organisieren. Darüber hinaus muß er aufpassen, daß in seinem eigenen Programmteil nicht die gleichen Variablennamen auftreten, sonst kommt der Computer völlig durcheinander. In Zeile 250 wird das Ergebnis zusammen mit Text auf dem Bildschirm angezeigt. Falls keine grafische Darstellung gewünscht wird, endet das Programm mit der STOP-Anweisung in Zeile 280.

Die Programmzeilen 400 bis 840 realisieren die grafische Darstellung der Funktion zwischen der unteren Grenze A und der oberen Grenze B. Da der benutzte Bildschirm in x-Richtung über 256 Pixel verfügt (0, ..., 255), werden in Zeile 410 für die Variable Z (1, ..., 256) die entsprechenden Plätze reserviert. Hier werden wir die errechneten Funktionswerte y speichern. In y-Richtung besitzt der Bildschirm 176 Pixel (0, ..., 175). In diesem Feld soll nun jede beliebige Funktion dargestellt werden. Dazu sind ein richtiger Maßstab zu errechnen und die x- und y-Achse korrekt zu positionieren. So dient die Zeile 450 zur richtigen Anordnung der y-Achse. Es wird keine y-Achse gezeichnet, wenn der Integrationsbereich außerhalb von $x = 0$ liegt.

Interpreter, die die Anweisung GOTO PZ (Zeile 440) nicht verstehen sollten, bieten als Ersatz die ON...GOTO-Anweisung. Die entsprechenden Änderungen müßten in die Programmzeilen 410, 420, 440 und 450 eingearbeitet werden.

Zur Ermittlung des Maßstabs und zur richtigen Anordnung der x-Achse werden in den Zeilen 480 bis 530 der größte und der kleinste Funktionswert y ermittelt. Ist der größte Funktionswert GW < 0, dann wird die x-Achse an die obere Bildschirmkante gelegt und das Bild entsprechend aufgebaut (Zeile 690). Wenn der größte Funktionswert GW $\geqq 0$ und der kleinste Funktionswert KW < 0 ist, dann wird die genaue Lage der x-Achse in den Zeilen 620 und 630 ermittelt. Sind schließlich im dritten Fall alle Funktionswerte $\geqq 0$, dann wird an der Bildschirmunterkante die x-Achse gezeichnet (Zeile 570). In allen Fällen wird das Zeichnen mit dem Unterprogramm in den Zeilen 800 bis 840 erledigt. Die OVER-Anweisungen in den Zeilen 820 und 830 verhindern eine „Beschädigung" der x-Achse durch die zu setzenden Zahlenwerte für A und B. Aber es geht natürlich auch ohne diese Anweisungen.

Die maßstabgerechte Darstellung der Punkte erfolgt für diese drei Fälle in getrennten PLOT-Anweisungen, die jeweils in eine Laufanweisung eingebaut sind. Diese drei PLOT- und Laufanweisungen hätten auch zu einer einzigen zusammengefaßt werden können. Wir haben es wegen der Übersichtlichkeit nicht getan und bitten den kundigen Leser, diese Zusammenfassung selbst zu versuchen. Bild 30 zeigt die

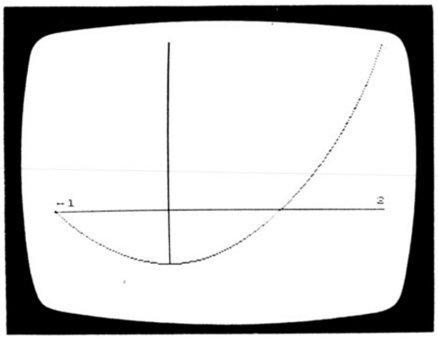


Bild 30. Darstellung einer Parabel

Darstellung einer Parabel mit der Fläche

$$A = \int_{-1}^{2} (x^2 - 1)\,\mathrm{d}x$$

Damit wird die korrekte Position der x- und y-Achse besonders deutlich.

Wir erwähnten schon, daß die Keplersche Faßformel der Simpsonschen Näherungsformel mit der kleinstmöglichen Intervallanzahl $N = 2$ entspricht.

Wie nun JOHANNES KEPLER dazu kam, über die Inhaltsbestimmung von Fässern nachzudenken, ist durch ihn selbst überliefert. In der Widmung seines Buches „Neue Stereometrie der Fässer, besonders der in der Form der österreichischen, und Gebrauch der kubischen Visierrute“ von 1615 schildert er in der ihm eigenen „launigen Weise“ seine Beweggründe, oder wie heute gesagt wird, seine Motivation. (Die Zitate stammen aus „Ostwalds Klassiker der exakten Wissenschaft“, Bd. 165).

„Als ich im November des letzten Jahres (1613) meine Wiedervermählung feierte, zu einer Zeit, da an den Donauufern bei Linz die aus Niederösterreich herbeigeführten Weinfässer nach einer reichlichen Lese aufgestapelt und zu einem annehmbaren Preise zu kaufen waren, da war es die Pflicht des neuen Gatten und sorglichen Familienvaters, für sein Haus den nötigen Trunk zu besorgen. Als einige Fässer eingekellert waren, kam am 4. Tage der Verkäufer mit der Meßrute (Bild 31), mit der er alle Fässer, ohne Rücksicht auf ihre Form, ohne jede weitere Überlegung oder Rechnung ihrem Inhalte nach bestimmte. Die Visierrute wurde mit ihrer metallenen Spitze durch das Spundloch quer zu den Rändern der beiden Böden eingeführt, und als die beiden Längen gleich gefunden worden waren, ergab die Marke am Spundloch die Zahl der Eimer im Fasse. Ich wunderte mich,

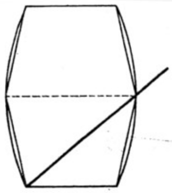


Bild 31. Meßrute zur Bestimmung des Faßinhalts

daß die Querlinie durch die Faßhälfte ein Maß für den Inhalt abgeben könne, und bezweifelte die Richtigkeit der Methode, denn ein sehr niedriges Faß mit etwas breiteren Böden und daher sehr viel kleinerem Inhalt könnte dieselbe Visierlänge besitzen. Es schien mir als Neuvermähltem nicht unzweckmäßig, ein neues Prinzip mathematischer Arbeiten, nämlich die Genauigkeit dieser bequemen und allgemein wichtigen Bestimmung nach geometrischen Grundsätzen zu erforschen und die etwa vorhandenen Gesetze ans Licht zu bringen.“

Ein Zeitraum von drei Tagen genügte ihm, die richtige Lösung zu finden; in dieser Fassung beschränkte sich die Schrift auf sechs Seiten. Aber der Herausgabe stellten sich, nachdem die Abhandlung etwas erweitert worden war, große Schwierigkeiten entgegen, weil jeder Drucker ein rein mathematisches Werk, wenn es auch von dem berühmten KEPLER stammte, für unverkäuflich hielt. So lag das Buch doch mehr als ein Jahr, bis KEPLER sich entschloß, es auf eigene Kosten herauszugeben. Diese Verzögerung kam aber dem Buch sehr zu statten, denn sie gab dem Verfasser Gelegenheit, den Inhalt nicht nur zu verbessern, sondern auch wesentlich zu erweitern.

„Obgleich ich durch geraume Zeit meinen übrigen Arbeiten entzogen wurde, reut mich der Zeitverlust nicht, denn niemals erntet eine Arbeit den Lohn der Unsterblichkeit, die den Samen der Zeit nicht ausgestreut hat“, heißt es am Ende des ersten Abschnitts.

Die Gedankengänge und die Erfindungskunst KEPLERS werden an einem Beispiel deutlich (Bild 32).

„Der Umfang des Kreises BG hat so viele Teile als Punkte, nämlich unendlich viele; jedes Teilchen kann angesehen werden als Basis eines gleichschenkligen Dreiecks mit den Schenkeln AB, so daß in der Kreisfläche unendlich viele Dreiecke liegen, die sämtlich mit ihren Scheiteln im Mittel-

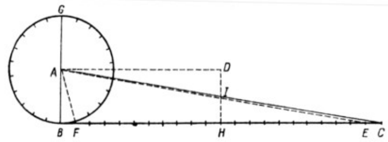


Bild 32. Keplers Vorgehen zur Bestimmung der Kreisfläche

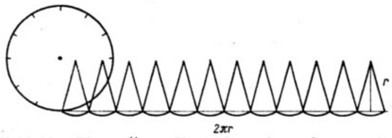


Bild 33. „Kamm" aus Dreiecken, deren Summe die Kreisfläche ergibt

punkt A zusammenstoßen. Es werde nun der Kreisumfang zu einer Geraden BC ausgestreckt. So werden also die Grundlinien jener unendlich vielen Dreiecke oder Sektoren sämtlich auf der einen Geraden BC abgebildet und nebeneinander angeordnet." Der Kreisinhalt ist dem Inhalt des Dreiecks ABC gleich. Wenn man die Sektoren des Kreises aufwickelt, erhält man einen „Kamm" (Bild 33). Steigert man die Anzahl seiner Zacken „unermeßlich", werden sie „unendlich" schmal. Die Lücken zwischen den Zacken ergänzen den Kamm zu einem Rechteck von der Höhe des Kreisradius und der Länge des Kreisumfangs. Die Fläche des Kamms beträgt die Hälfte des Rechtecks. Obwohl die Länge des Kreisumfangs vorausgesetzt wird, bietet sich ein Weg zur Bestimmung von krummlinig begrenzten Flächen.

Damit hatte der Begriff des Unendlich-Kleinen in die Geometrie Eingang gefunden; nach der Exhaustionsmethode des Archimedes war dies der zweite Schritt auf dem Wege zur Infinitesimalrechnung. Keplers Methode eröffnete ein weites Feld für neue Spekulationen, auf sie stützt sich die Vorstellung der späteren Geometer, „ebene Figuren seien als Gewebe aus parallelen Fäden hergestellt zu denken, Körper als Bücher, die aus einander parallelen Blättern bestehen (Cavalieri)". Zum „Schluß des Buches" kommt Johannes Kepler wieder auf die Fässer, und vor allem ihren Inhalt, zurück.

„Ich hatte mir vorgenommen, die Irrtümer anderer in der Bestimmung des Inhalts eines ganz oder teilweise gefüllten Fasses aufzudecken und die Grundlagen der Berechnung in den Lehrsätzen dieses Buches darzustellen. Da aber eine Wahrheit sich durchsetzt, auch wenn sie schweigt im Lärm der Irrtümer, und da das Buch, das anfangs kaum zehn Sätze umfaßte, über die Maßen angewachsen ist, so möge, wer daran seine Freude hat, an seinen Fehlern festhalten; wir

wollen die verlangten Vorteile verwenden und beten, daß uns unsere geistigen und leiblichen Güter erhalten bleiben, und der trinkbare Stoff in reichlicher Menge vorhanden sein möge."

„Das Spinnen gehört zu den ältesten Handbeschäftigungen" steht in Meyers Konversationslexikon von 1897. „Wollgewebe und somit -gespinste nehmen im Altertum unter allen Gespinsten den ersten Rang ein." „Als Erfinderin der Wollarbeit galt Athene und als Ort der Erfindung Athen." Die älteste Methode des Spinnens war das Handspinnen, das erst später vom Spinnrad abgelöst wurde. Bei der Benutzung der Handspindel windet man die gewaschene und gekämmte Wolle auf einen hölzernen Stock, den Rocken a (Bild 34). Durch Ausziehen der aufgewickelten Wolle mit der einen Hand werden die Fasern geordnet, während die andere Hand die Spindel b dreht. An der Spindel ist mit einer Schlinge in einem Häkchen der Faden befestigt, so daß sich die Drehung auf den Faden überträgt und ihn verdrillt. Die Spindel ist ein Stab von etwa 25 cm Länge, an dessen unterem Ende sich eine Schwungmasse c befindet. An dem sich bildenden Faden

Bild 34. Handspinnen mit Rocken (a), Spindel (b) und Schwungmasse (c)

sinkt die sich drehende Spindel allmählich bis zur Erde. Dann wird die Spindel gebremst, der Faden vom Haken der Spindel gelöst und auf die Spindel aufgewickelt, wieder festgehakt, die Spindel in Drehungen versetzt und immer so weiter gesponnen. Wenn man den Rocken von oben betrachtet (auf Bild 34 von oben), sieht die aufgewundene Wolle wie eine Spirale aus. Im Griechischen bedeutet „klōthō" ich spinne, und daraus entstand die Bezeichnung Klothoide oder Spinnlinie. Die Berechnung der Klothoide ist ein schönes Beispiel für die Anwendung der Simpsonschen Näherungsformel.

Wir gehen aus von der Winkelfunktion sin x. Wenn eine Welle beschrieben werden soll, dann wird die Hand auf und nieder und gleichzeitig von links nach rechts bewegt. Die Kurve, die dabei die Hand beschreibt, kommt der Funktion $y = \sin x$ schon sehr nahe. In jedem Tafelwerk, in jedem guten Taschenrechner und im Kleincomputer sind die Werte abrufbar, um die Sinusfunktion zu zeichnen. Ebenso einfach läßt sich auch eine andere Funktion zeichnen:

$$y = \sin (x^2)$$

Diese Funktion darf nicht verwechselt werden mit $y = \sin^2 x$. Während die Funktion $y = \sin x$ ein Maximum zwischen 0 und 2π hat, erreicht die Funktion $y = \sin (x^2)$ in diesem Intervall siebenmal ihren Maximalwert. Die Maximalwerte liegen mit wachsendem x immer enger beieinander. Mit Hilfe des Teilprogramms zur Erzeugung von grafischen Darstellungen aus Programm 7 können wir die Funktionen $y = \sin x$ und $y = \sin x^2$ darstellen. Wir wählen dabei $0 \leqq x \leqq 6{,}3$. Der BASIC-Interpreter verarbeitet nur Argumente im Bogenmaß, so daß unsere Darstellung geringfügig über 2π hinausgeht. Die Bildschirmdarstellung beider Funktionen zeigt Bild 35. Die höchstmögliche Auflösung beim hier benutzten Kleincomputer liegt bei 256 Punkten auf der x-Achse. Dazu wurden jeweils die 256 y-Werte berechnet. Bei der Funktion $y = \sin x^2$ werden die Auflösungsgrenzen dieser bescheidenen Computergrafik sichtbar, die mit zunehmendem x keine geschlossene Linie mehr, sondern nur noch Einzelpunkte liefert. Von der Funktion $y = \sin x^2$ sollen nun bestimmte Integrale berechnet werden, z. B.

$$S_1 = \int_0^1 \sin x^2 \, dx$$

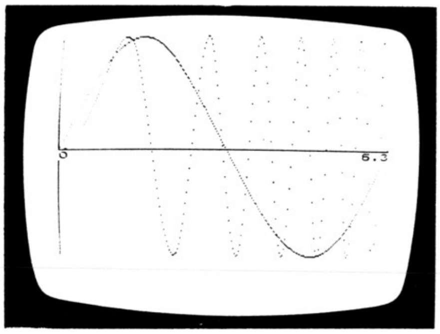


Bild 35. Darstellung von sin x und sin x^2

Das Integral ist nicht elementar in geschlossener Form darstellbar. Man kann aber die zu integrierende Funktion in eine Potenzreihe entwickeln und dann gliedweise integrieren. Mit Hilfe der Simpsonschen Näherungsformel kann das angegebene Integral berechnet werden, und man erhält

$$S_1 = \int_0^1 \sin x^2 \, dx = 0{,}3102683$$

$$S_2 = \int_0^2 \sin x^2 \, dx = 0{,}80477649$$

Die Werte der bestimmten Integrale sind in Zahlentafeln angegeben, allerdings mit $\frac{\pi}{2} x^2$ als Argument der Sinusfunktion. Wir wollen im folgenden das gleiche Argument wählen, und erhalten z. B.

$$S(1) = \int_0^1 \sin \frac{\pi}{2} x^2 \, dx = 0{,}4383$$

$$S(2) = \int_0^2 \sin \frac{\pi}{2} x^2 \, dx = 0{,}3434$$

Wir benötigen zur grafischen Darstellung der Spinnlinie noch die bestimmten Integrale der Funktion $y = \cos \frac{\pi}{2} x^2$. Hier gilt z. B.

$$C(1) = \int_0^1 \cos \frac{\pi}{2} x^2 \, dx = 0{,}7799$$

$$C(2) = \int_0^2 \cos \frac{\pi}{2} x^2 \, dx = 0{,}4883$$

Für die obere Grenze der bestimmten Integrale S und C kann man nun jeden Wert u einsetzen, so daß man schreiben kann

$$S(u) = \int_0^u \sin \frac{\pi}{2} x^2 \, dx$$

$$C(u) = \int_0^u \cos \frac{\pi}{2} x^2 \, dx$$

Diese Integrale werden die Fresnelschen Integrale (Bild 36) genannt. Sie ermöglichen in der theoretischen Optik die Berechnung von Beugungserscheinungen.

Wir können für jedes u den berechneten Wert von $S(u)$ als

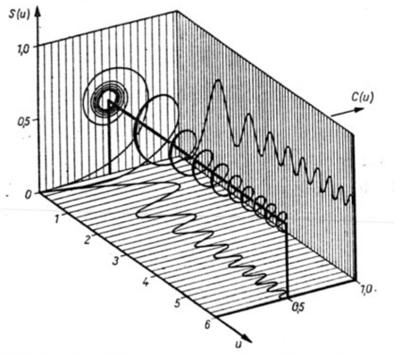


Bild 36. Zur Erläuterung der Fresnelschen Integrale

y und von $C(u)$ als x in ein rechtwinkliges Koordinatensystem einzeichnen und erhalten so die Klothoide oder Spinnlinie, die auch als Cornusche Spirale bezeichnet wird. Die Berechnung der x- und y-Werte aus den angeführten Integralen gestaltet sich recht aufwendig. Es ist sinnvoll, die Integrale im Bereich von $0 \leqq u \leqq 4$ zu berechnen. Eine weitere Erhöhung von u führt zu immer kleineren und enger beieinanderliegenden Spiralen, die aber die Computergrafik ohnehin nicht mehr darstellen kann. Um einen geschlossenen Kurvenzug zu erhalten, müssen wir eine Mindestschrittweite von 0,01 einhalten. Daraus folgt, daß die x, y-Koordinaten von 400 Werten berechnet werden müssen. Damit sind also 800 Integrale zu lösen.

Wir erwähnten schon, daß bei Funktionen, deren Kurven die x-Achse schneiden, sehr feine Intervalleinteilungen vorgenommen werden müssen. Nur so erhält man mit der Simpsonschen Formel brauchbare Näherungen. Nun hat die Funktion $y = \sin \frac{\pi}{2} x^2$ im Bereich von 0 bis 4 insgesamt 7 Nullstellen (ohne Berücksichtigung von $x = 4$, das $y \approx 0$ liefert). Dabei sind für eine Berechnung mit 4 gültigen Stellen 120 Intervalle nötig. So ist der tabellierte Wert von

$$\int_0^4 \sin \frac{\pi}{2} x^2 \, dx \approx 0{,}4205$$

Der Computer liefert mit 120 Intervallen den Wert 0,42050186. Da wir die Berechnungen aber nur zur Erzeugung der Grafikpunkte durchführen, ist eine kleine ökonomische Betrachtung angebracht. Es wäre uneffektiv, die x- und y-Werte unter großem Zeitaufwand mit einer Genauigkeit auszurechnen, die die Computergrafik gar nicht mehr darstellen kann. Wir beschäftigen uns deshalb kurz mit dem geplanten Computerbild. Die Darstellung ist quadratisch, wobei vom Mittelpunkt maximal 0,8 Einheiten nach rechts, links, oben und unten gegangen werden kann. Daraus folgt, daß 1,6 Einheiten auf die maximal 175 Punkte des Bildschirms verteilt werden müssen. Das ergibt einen ungefähren Maßstab von 1 : 100. Damit sind zwei gültige Stellen aus der jeweiligen Integralberechnung ausreichend. So ergäbe z. B. der Wert 0,4205 (siehe oben) den y-Wert $42 \approx 0{,}4205 \cdot 100$, der also 42 Punkte nach oben und nach unten vom Mittelpunkt des Bildschirms entfernt wäre.

BASIC-Programm 8. CORNUSCHE SPIRALE

```
 10 REM CORNUSCHE SPIRALE
 20 REM GITTER ZEICHNEN
 30 FOR I=7 TO 167 STEP 20
 40 PLOT 47,I: DRAW 160,0
 50 NEXT I
 60 FOR I=47 TO 207 STEP 20
 70 PLOT I,7: DRAW 0,160
 80 NEXT I
 90 PRINT AT 0,15;0.8: PRINT AT
11,3;0.8: PRINT AT 11,16;0
100 PRINT AT 11,26;0.8: PRINT A
T 21,15;0.8
110 REM RECHNEN UND ZEICHNEN
120 LET A=0: LET N=50: DIM W(N-
1)
130 FOR B=.01 TO 4 STEP .01
140 LET PZ=510: GO SUB 300: LET
XP=FL
150 LET PZ=610: GO SUB 300: LET
YP=FL
160 PLOT 127+INT (XP*100),87+IN
T (YP*100)
170 PLOT 127-INT (XP*100),87-IN
T (YP*100)
180 NEXT B
190 STOP
300 REM UP SIMPSON
310 LET Y4=0: LET Y2=0: LET K=2
320 LET X=A: GO SUB PZ: LET YA=
Y
330 LET X=B: GO SUB PZ: LET YB=
Y
340 LET H=(B-A)/N
350 FOR I=1 TO N-1
360 LET X=A+I*H: GO SUB PZ: LET
W(I)=Y
370 IF I-K=0 THEN LET Y2=Y2+W(I
): LET K=K+2: GO TO 390
380 LET Y4=Y4+W(I)
390 NEXT I
400 LET FL=H/3*(YA+YB+4*Y4+2*Y2
)
410 RETURN
500 REM UP X-WERT
510 LET Y=COS (X*X*PI/2): RETUR
N
600 REM UP Y-WERT
610 LET Y=SIN (X*X*PI/2): RETUR
N
```

Aus diesem Grund ist es ausreichend, mit 50 Intervallen zu rechnen, da auf diese Weise im Integrationsbereich von 0 bis 4 stets 2 gültige Stellen geliefert werden. Die Berechnung eines solchen Integrals dauert bei achtstelligem Interpreter etwa 5 s. Da insgesamt 802 Integrale zu berechnen sind, ergibt sich über eine Stunde Rechenzeit. Sehen wir uns nun das dazu erarbeitete Rechenprogramm an. Das BASIC-Programm 8 beginnt mit dem Zeichnen des Koordinatengitters auf dem Bildschirm. Wir verwenden hier wieder die PLOT- und die DRAW-Anweisung (Zeilen 30 bis 80) und zeichnen nur aller 0,2 Einheiten eine Linie, um den Bildschirm mit seiner bescheidenen Auflösung nicht allzusehr mit

Linien zu „belasten". In den Zeilen 90 und 100 beschriften wir, auch wieder sehr sparsam, das Koordinatennetz.

Das eigentliche Berechnungs- und Zeichnungsprogramm ist in den Zeilen 110 bis 190 enthalten. Die folgenden Programmzeilen enthalten Unterprogramme, auf die wir an der entsprechenden Stelle eingehen. In Zeile 120 setzen wir die untere Integrationsgrenze mit A=O und die Intervallanzahl mit N=50 fest. Die Laufanweisung in Zeile 130 sorgt für die Berechnung der 400 Einzelpunkte in Schritten von 0,01 Einheiten. Wir gehen dabei so vor, daß wir die Funktion $y = \cos\left(\frac{\pi}{2}x^2\right)$ als Unterprogramm in die Programmzeile 510 bringen. Die Funktion $y = \sin\left(\frac{\pi}{2}x^2\right)$ speichern wir auch als Unterprogramm in der Programmzeile 610. In Zeile 140 belegen wir die Zeilenvariable PZ mit 510. Dann wird mit GOSUB 300 das SIMPSON-Programm als Unterprogramm aufgerufen. Es befindet sich auf den Zeilen 300 bis 410 und ist mit dem entsprechenden Programmteil aus Programm 7 identisch, deshalb müssen hier eventuell auch die GOSUB-Sprünge mit Variablen durch ON...GOSUB-Anweisungen ersetzt werden. Nach Rückkehr aus dem Unterprogramm wird die ermittelte Fläche FL in der Zeile 140 dem x-Wert des Punkts (x, y) zugeordnet. Der Vorgang wiederholt sich in der Zeile 150 für den y-Wert. Durch Änderung der Zeilenvariablen PZ auf 610 erreichen wir, daß nun mit der Funktion zur Ermittlung des y-Werts gerechnet wird. Folglich liegen nach zweimaliger Benutzung der Simpsonschen Näherungsformel die Koordinaten XP und YP für genau einen Punkt (x,y) vor. Die Darstellung erfolgt mit PLOT-Anweisungen in den Zeilen 160 und 170. Zur Darstellung sind noch einige Umrechnungen erforderlich. Die Bildschirmmitte liegt bei $x = 127$ und $y = 87$. Als Maßstab haben wir genau 1:100 gewählt. Beträgt der Wert für XP z. B. 0,7154 $\left[\text{entspricht} \int_0^{1,2} \cos\left(\frac{\pi}{2}x^2\right) \mathrm{d}x\right]$, so ergibt sich für die x-Koordinate des Bildpunkts $127 + \mathrm{INT}\ (0{,}7154 \cdot 100) = 198$. Das Runden in Abhängigkeit von der dritten Nachkommastelle haben wir nicht berücksichtigt. Die Zeile 170 liefert die spiegelbildliche Darstellung im dritten Quadranten des Koordinatennetzes. Dieses „Spiegelbild" liegt darin begründet, daß für gerade Funktionen $\int_0^{-x} = -\int_0^{x}$ gilt, d. h.,

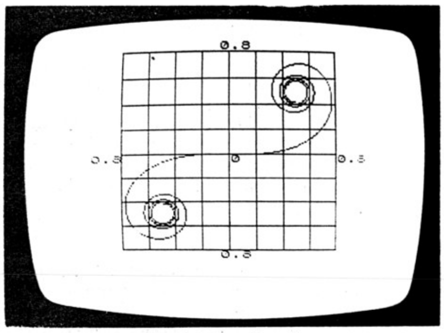


Bild 37. Darstellung der Cornuschen Spirale

die Integrale haben den gleichen Betrag, aber verschiedene Vorzeichen.
Nach etwa 70 Minuten Rechenzeit (achtstelliger Interpreter) ist eine Darstellung entstanden, die Bild 37 zeigt. Hier werden wieder die Grenzen einer Kleincomputergrafik deutlich. Rechnet man mit Integralen, deren obere Grenze über 4 hinausgeht, dann werden die Abstände zwischen den einzelnen Spiralen immer enger, und damit ist eine solch einfache Computergrafik überfordert. Diese immer kleiner werdenden Abstände sind ein Merkmal der Cornuschen Spirale, bei der die Krümmung der Kurve proportional ihrer Bogenlänge ist. Entdeckt hat das Ganze der französische Physiker Alfred Cornu (1941–1902), natürlich ohne Kleincomputer, der immerhin in einer guten Stunde 800 Integrale berechnet und die Ergebnisse gezeichnet hat.

3.6. Kepler und die Spiralnebel

Die Gesellschaft Deutscher Naturforscher und Ärzte hatte auf ihrer Tagung im September 1956 in Hamburg einen Preis ausgesetzt für die Behandlung des Themas „Die Entstehung von Sternen". Die eingesetzte Jury der Gesellschaft hat drei der eingegangenen Arbeiten als preiswürdig anerkannt und veröffentlicht. Eine der Arbeiten befaßte sich mit der Entstehung von Sternen in Spiralnebeln, deren Struktur Kepler und die Astronomen aller Zeiten beschäftigte. Das Sternensystem, in dem wir leben, besteht aus etwa 100 Milliarden Sternen, die hauptsächlich in einer flachen Scheibe angeordnet sind. Ein weit entfernter Beobachter im Weltraum würde uns vielleicht so sehen, wie uns das Sternensystem des Andromeda-Nebels am nächtlichen Himmel erscheint. Der Andromeda-Nebel sieht aus wie eine flache Scheibe, in der man deutlich eine Spiralstruktur erkennt. Die Entstehung der Spiralstruktur beschäftigt die Astronomen seit langer Zeit, und auch Kepler hat darüber nachgedacht, allerdings ohne zu Ergebnissen zu kommen. Für die Ausbildung der Spiralarme, die bis heute nicht restlos aufgeklärt ist, gibt es allerdings Erklärungsmöglichkeiten.
Man kann von der gesicherten Erkenntnis ausgehen, daß die Sternensysteme rotieren. Die Rotationsgeschwindigkeit kann man messen. Die Rotationsperiode des Milchstraßensystems liegt bei etwa 200 Millionen Jahren. In dieser Zeit hat sich das Milchstraßensystem, ein als flache Scheibe angeordnetes Sternensystem, einmal um eine Achse gedreht, die senkrecht auf der Scheibe steht.
Die Rotation erfolgt nun allerdings nicht wie die eines starren Körpers, bei dem die geometrischen Abmessungen stets erhalten bleiben. Ein sehr einfaches Beispiel ist der drehbare Kuchenteller, auf dem Kuchenkrümel liegen. Die großen und kleinen Kuchenkrümel sind die großen und kleinen Sterne, die in ihrer Gesamtheit das Sternensystem darstellen. Wenn der Teller gedreht wird, so bleibt er als starrer Körper unverändert bestehen. Bei gleichförmiger Geschwindigkeit der Drehung haben alle Bestandteile des Tellers und alle Krümel die gleiche Winkelgeschwindigkeit. In gleichen Zeiten wird der gleiche Winkel überstrichen. Die Bahngeschwindigkeit ist aber unterschiedlich. Je weiter ein Punkt bzw. ein Krümel von der Drehachse entfernt ist, um so größer ist seine Bahngeschwindigkeit. Bei den kosmischen Entfernungen ist der Abstand von der Drehachse so groß, daß die Bahngeschwindigkeit ebenfalls sehr große Werte erreichen müßte. Offensichtlich ist es nun so, daß die Winkelgeschwindigkeit mit zunehmender Entfernung von der Rotationsachse abnimmt. Im Innern des rotierenden Sternensystems legt ein jeder Stern bei jeder vollen Umdrehung noch etwa 360° zurück. Am Rande des rotierenden Sternensystems kann aber ein Stern während einer Umdrehung

keinesfalls mehr 360° zurücklegen, sondern er bleibt um den Winkel $\Delta\varphi$ zurück. Der Betrag des Winkels $\Delta\varphi$, der bei einer Rotation fehlt, ist abhängig vom Abstand des Sterns von der Drehachse. Für das Zurückbleiben, also die Abweichung $\Delta\varphi$, nehmen wir folgenden Zusammenhang an:

$$\Delta\varphi = \frac{2^\circ}{1 + \left(\frac{r_{max}}{r}\right)^2}$$

Die Größe r_{max} ist der größte Radius, also der Rand des Sternenhaufens. Die Position jedes einzelnen Sternes im Sternenhaufen ist durch seinen Abstand vom Mittelpunkt (Radius r) und den Winkel φ bestimmt (Polarkoordinaten). Bei einer vollständigen Rotation um den Koordinatenursprung legen die Sterne nur 360° − $\Delta\varphi$ zurück. Je weiter der Stern vom Koordinatenursprung entfernt positioniert ist (r näher an r_{max}), desto stärker wird er nach jeder Umdrehung „hinterherhinken", denn es gilt für die neue Position $\varphi_{i+1} = \varphi_i - \Delta\varphi$, während r konstant bleibt. Ein Randstern ($r = r_{max}$) wird bei einer vollen Umdrehung demnach um $\Delta\varphi = \frac{2^\circ}{1+1^2} = 1^\circ$ zurückbleiben.

Diesen Sachverhalt kann man am besten grafisch mit einem Kleincomputer veranschaulichen. Das dazu erforderliche BASIC-Programm zeigt Programm 9. In der Programmzeile 20 wird die Variable RM (entspricht r_{max}) mit 85 Einheiten festgelegt, weil dieser Wert den Bildschirm sinnvoll ausnutzt. Die Variable K enthält die Anzahl der Drehungen, und die Variable S gibt die Schrittweite der anzuzeigenden Drehungen an. Für S = 1 (also nach jeweils einer Umdrehung) sind die Änderungen auf dem Bildschirm relativ gering. Es wird viel Rechenzeit gebraucht, bis deutlich sichtbare Verzerrungen eintreten. Setzt man S = 60, dann wird nach der Grundfigur gleich das Ergebnis der 60. Umdrehung auf dem Bildschirm angezeigt.

In der Programmzeile 30 werden Plätze für die Bildschirmkoordinaten X, Y, die Radien R und die Abweichungen D (entspricht $\Delta\varphi$) reserviert. In den Zeilen 40 bis 190 werden die insgesamt 540 Koordinaten für eine Figur berechnet und abgespeichert, die wie ein Strohstern aussieht. Für diese 540 Koordinaten werden dann innerhalb der Laufanweisung in den Zeilen 210 bis 250 die zugehörigen Radien R(I) und die Abweichungen D(I) (entspricht $\Delta\varphi_i$) ermittelt. Der Wert

BASIC-Programm 9. VERDREHUNG

```
  10 REM VERDREHUNG
  20 LET RM=85: LET K=0: LET S=6
0
  30 DIM X(540): DIM Y(540): DIM
 R(540): DIM D(540)
  40 REM BASISPUNKTE 1.GERADE
  50 FOR I=1 TO 85: LET X(I)=0:
LET Y(I)=I: NEXT I
  60 REM BASISPUNKTE 2.GERADE
  70 FOR I=86 TO 135: LET X(I)=I
-85: LET Y(I)=I-85: NEXT I
  80 REM BASISPUNKTE 3.GERADE
  90 FOR I=136 TO 220: LET X(I)=
I-135: LET Y(I)=0: NEXT I
 100 REM BASISPUNKTE 4.GERADE
 110 FOR I=221 TO 270: LET X(I)=
I-220: LET Y(I)=220-I: NEXT I
 120 REM BASISPUNKTE 5.GERADE
 130 FOR I=271 TO 355: LET X(I)=
0: LET Y(I)=270-I: NEXT I
 140 REM BASISPUNKTE 6.GERADE
 150 FOR I=356 TO 405: LET X(I)=
355-I: LET Y(I)=355-I: NEXT I
 160 REM BASISPUNKTE 7.GERADE
 170 FOR I=406 TO 490: LET X(I)=
405-I: LET Y(I)=0: NEXT I
 180 REM BASISPUNKTE 8.GERADE
 190 FOR I=491 TO 540: LET X(I)=
490-I: LET Y(I)=I-490: NEXT I
 200 REM BERECHNUNG R,D UND ZEIC
HNEN X,Y
 210 FOR I=1 TO 540
 220 LET R(I)=SQR (X(I)*X(I)+Y(I
)*Y(I))
 230 LET D(I)=2/(1+(RM/R(I))↑2)*
PI/180
 240 PLOT X(I)+128,Y(I)+88
 250 NEXT I
 260 STOP
 270 CLS
 280 LET K=K+S: PRINT K;". DREHU
NG"
 290 FOR I=1 TO 540
 300 IF X(I)=0 AND Y(I)>0 THEN L
ET FI=0: GO TO 370
 310 IF X(I)=0 AND Y(I)<0 THEN L
ET FI=PI: GO TO 370
 320 IF X(I)>0 AND Y(I)=0 THEN L
ET FI=PI/2: GO TO 370
 330 IF X(I)<0 AND Y(I)=0 THEN L
ET FI=3*PI/2: GO TO 370
 340 LET FI=ATN (Y(I)/X(I))
 350 IF X(I)>0 AND Y(I)>0 OR X(I
)>0 AND Y(I)<0 THEN LET FI=PI/2-
FI: GO TO 370
 360 IF X(I)<0 AND Y(I)>0 OR X(I
)<0 AND Y(I)<0 THEN LET FI=3*PI/
2-FI: GO TO 370
 370 LET FI=FI-5*D(I)
 380 LET X(I)=R(I)*SIN (FI)
 390 LET Y(I)=R(I)*COS (FI)
 400 PLOT X(I)+128,Y(I)+88
 410 NEXT I
 420 GO TO 260
```

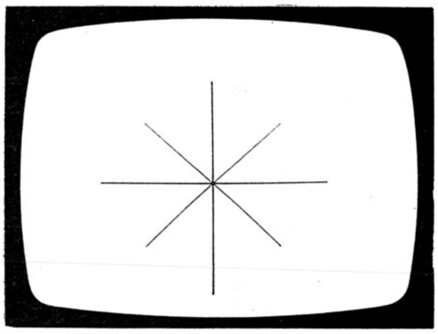


Bild 38. Strohstern als Grundfigur

D(I) wird im Bogenmaß abgespeichert. Für jeden Punkt mit den Koordinaten X(I), Y(I) bleiben die Werte R(I) und D(I) während des gesamten Drehvorgangs konstant. Es genügt deshalb, diese Werte hier nur einmal zu ermitteln. In Zeile 240 wird schließlich die Grundfigur, ein Strohstern aus insgesamt 8 Geraden, auf dem Bildschirm dargestellt. Bild 38 zeigt das Ergebnis.

Das Programm wird in Zeile 260 gestoppt, wobei der Computer bis hierher schon knapp 3 Minuten benötigt hat. Die Fortsetzung eines BASIC-Programms nach einer STOP-Anweisung erfolgt durch Realisierung der CONTINUE-Anweisung über die Tastatur (evtl. ist auch die BREAK-Taste erforderlich). Im vorliegenden Programm wird dann mit der Löschung des Bildschirms und der Anzeige der Zahl der Drehungen fortgesetzt. Bei S=60 folgt demnach auf die Grundfigur die Figur, die sich nach der 60. Drehung ergibt. Zur Ermittlung, Speicherung und Anzeige dieser neuen Koordinaten dient die Laufanweisung in den Zeilen 290 bis 410. Dem aufmerksamen Leser wird auffallen, daß wir hier, ebenso wie beim BASIC-Programm „Raketenstart" (Programm 5), zwischen kartesischen Koordinaten und Polarkoordinaten hin- und herpendeln. Zum Zeichnen auf dem Bildschirm sind kartesische Koordinaten übersichtlich, aber zur Berechnung von Entfernungs- oder Winkeldifferenzen

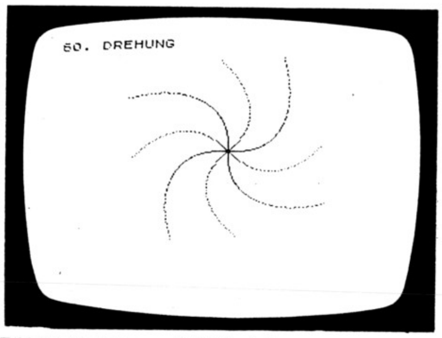


Bild 39. Strohstern nach 60 Umdrehungen

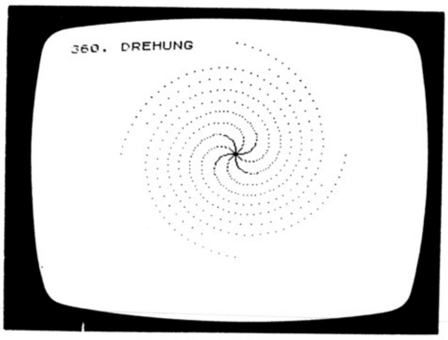


Bild 40. Strohstern nach 360 Umdrehungen

sind Polarkoordinaten nützlich. Die Umrechnung der Koordinatensysteme ist für den BASIC-Interpreter natürlich kein Problem, solange die Argumente für die trigonometrischen Funktionen im Bogenmaß angegeben werden und im Definitionsbereich der Funktion liegen. So benötigt man zur

Umrechnung kartesischer Koordinaten in Polarkoordinaten die Funktion $y = \arctan x$, die jeder BASIC-Interpreter besitzt. Diese Funktion liefert aber für beliebige Zahlenwerte x nur Winkel y, die im Bereich von $-\frac{\pi}{2} < y < +\frac{\pi}{2}$ liegen. Aus diesem Grund müssen die Werte $\frac{\pi}{2}$, π, $\frac{3}{2}\pi$ und 2π durch Fallunterscheidungen festgelegt werden. Das erfolgt in den Programmzeilen 300 bis 330. Für alle übrigen Fälle wird in Zeile 340 der Winkel FI (entspricht φ) im Bogenmaß mit der arctan-Funktion (ATN-Anweisung) ermittelt. Die Zeilen 350 und 360 positionieren den Winkel dann in den richtigen Quadranten. In Zeile 370 wird dann schließlich der neue Winkel FI ermittelt. Er wird in den Zeilen 380 und 390 gebraucht, in denen wieder von Polarkoordinaten in kartesische Koordinaten umgerechnet wird. Hier werden auch die neuen Koordinaten X(I), Y(I) abgespeichert. In Zeile 400 wird dann die verdrehte Figur gezeichnet. Anschließend wird zur STOP-Anweisung in Zeile 260 gesprungen. Die verdrehte Figur kann nun in aller Ruhe betrachtet werden. Bild 39 zeigt die Darstellung nach der 60. Umdrehung.

Eine erneute Ausführung der CONTINUE-Anweisung über die Tastatur setzt die Programmbearbeitung ab Zeile 270 mit der Berechnung und Zeichnung nach der 120. Umdrehung fort. Für jede dieser Berechnungen benötigt der Computer knapp 3 Minuten. Nach der 360. Umdrehung „hinken" die vier Randsterne ($r = r_{max}$) um eine volle Umdrehung ($360° = 2\pi$) hinterher. Das zeigt Bild 40, aus dem für den Uneingeweihten keinerlei Rückschlüsse mehr auf die Originalfigur möglich sind. Die Spiralstruktur ist aber deutlich zu erkennen, so daß an dieser Darstellung sicherlich auch KEPLER seine Freude gehabt hätte.

4. Charles Darwin (12.2.1809 – 19.4.1882)

4.1. Biographie

Alle Lebensbeschreibungen über CHARLES ROBERT DARWIN können sich auf eine Autobiographie stützen, die am 31. Mai 1876 begonnen und bis in das Jahr 1881 mehrfach ergänzt wurde. Die Ergiebigkeit dieser Quelle erklärt sich aus der Offenheit, der Wahrheitsliebe und Aufrichtigkeit, Einfachheit und Bescheidenheit, mit der DARWIN über sich selbst nachgedacht und geschrieben hat. Die Autobiographie ist überschrieben: „Erinnerungen an die Entwicklung meines Geistes und Charakters" und lesenswert, wie der erste Abschnitt bereits beweist und die weiteren Ausschnitte zeigen:

„Als der Herausgeber einer deutschen Zeitschrift an mich geschrieben hatte wegen einer Darstellung der Entwicklung meines Geistes und Charakters zusammen mit einer Skizze einer Autobiographie, kam mir der Gedanke, daß ein solcher Versuch mir Freude bereiten und möglicherweise auch meine Kinder oder deren Kinder interessieren würde. Ich weiß, daß es mich in hohem Grade interessiert haben würde, wenn ich auch nur eine so kurze und langweilige Skizze vom Geiste meines Großvaters, von ihm selbst geschrieben, hätte lesen können, und was er gedacht und getan hat und wie er gearbeitet hat. Ich habe versucht, die folgende Schilderung über mich so zu schreiben, als wäre ich ein Verstorbener in einer anderen Welt, der zurück auf sein eigenes Leben sähe. Auch ist mir das nicht schwergefallen; denn das Leben ist nun für mich nahezu vorüber. Ich habe mir keinerlei Mühe in bezug auf den Stil gegeben.

Ich wurde in Shrewsbury am 12. Februar 1809 geboren."

„Meine Mutter starb im Juli 1817, als ich wenig über 8 Jahre alt war."

„Daß die Schule ein Mittel der Erziehung sei, war mir einfach unbegreiflich. Während meines ganzen Lebens bin ich außer-

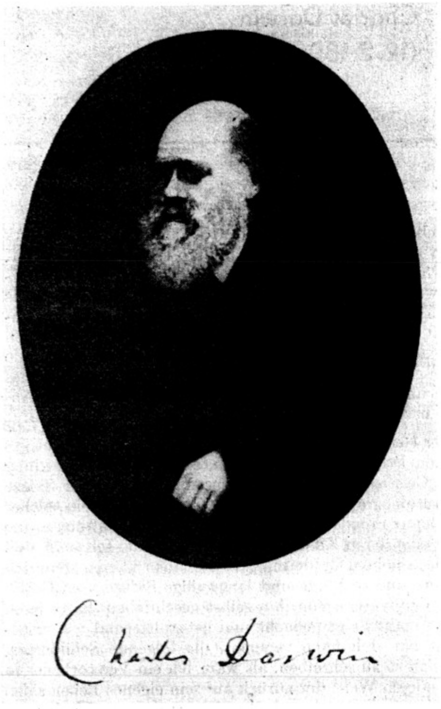


Bild 41. Charles Darwin

gewöhnlich unfähig gewesen, irgendeine Sprache zu beherrschen." „Blicke ich nun so gut ich kann auf meinen Charakter während meiner Schulzeit zurück, so waren die einzigen Eigenschaften in dieser Periode, die etwas Gutes für die Zukunft versprachen, die, daß ich stark ausgeprägte und verschiedenartige Neigungen, sehr viel Eifer für alles

hatte, was mich nur irgend interessierte, und eine lebhafte Freude an dem Verstehen irgendeines komplizierten Themas oder Gegenstandes."

„Da ich auf der Schule nichts Rechtes zuwege brachte, nahm mich mein Vater sehr weise in einem beträchtlich früheren Alter als gewöhnlich von der Schule und schickte mich (Oktober 1825) mit meinem Bruder auf die Universität Edinburgh, wo ich zwei Jahre oder Sessionen lang blieb. Mein Bruder beendete sein Medizinstudium, obschon ich nicht glaube, daß er je die wirkliche Absicht gehabt hat, zu praktizieren; ich wurde hingeschickt, um es anzufangen. Bald nach dieser Zeit aber kam ich durch verschiedene kleine Umstände zu der Überzeugung, daß mir mein Vater Vermögen genug hinterlassen würde, um mit einiger Bequemlichkeit davon zu leben, obgleich ich mir niemals einbildete, daß ich ein so wohlhabender Mann sein würde, wie ich es bin; mein Glaube reichte aber doch aus, um jede ernste Anstrengung, Medizin zu studieren, zu hemmen."

„Cambridge 1828—1831. – Nachdem ich zwei Sessionen in Edinburgh zugebracht hatte, bemerkte mein Vater, oder er hörte es von meinen Schwestern, daß mir der Gedanke, Arzt zu werden, nicht angenehm sei; so schlug er mir vor, ich solle Geistlicher werden." „Wenn ich daran denke, wie heftig ich von den Orthodoxen angegriffen worden bin, so erscheint es mir spaßig, daß ich einmal beabsichtigt habe, Geistlicher zu werden. Auch ist diese Absicht und meines Vaters Wunsch niemals formell aufgegeben worden, sondern ist eines natürlichen Todes gestorben, als ich beim Verlassen von Cambrigde als Naturforscher an Bord der „Beagle" ging."

„Während der drei Jahre, die ich in Cambridge zubrachte, war meine Zeit, was die akademischen Studien anbelangt, ebenso vollständig verschwendet wie in Edinburgh und auf der Schule." Immerhin hat Darwin das Studium in Cambridge mit Erfolg absolviert, als einer „der Menge Leute, die das Examen nicht um einer Auszeichnung willen machen."

„Obgleich es, wie wir sofort sehen werden, einige das Üble wieder gut machende Momente in meinem Leben in Cambridge gab, so war doch meine Zeit dort in trauriger Weise vergeudet, und schlimmer als vergeudet."

Zu den guten Momenten zählt Darwin die Exkursionen und seine geologischen und botanischen Studien.

„Als ich von meiner kurzen geologischen Tour in Nordwales nach Hause kam, fand ich einen Brief von HENSLOW vor, der mir mitteilte, daß Kapitän FITZ-ROY bereit sei, einen Teil seiner eigenen Kabine irgendeinem jungen Manne abzutreten, der Lust habe, als freiwilliger Naturforscher ohne Bezahlung mit ihm die Reise auf der „Beagle" zu machen. Ich habe, glaube ich, in meinem handschriftlichen „Tagebuch" eine Schilderung aller der Umstände gegeben, die damals eintraten. Ich will hier nur erwähnen, daß ich sofort darauf erpicht war, das Anerbieten anzunehmen; mein Vater machte aber ernstliche Einwendungen und fügte, zu meinem Glücke, die Worte hinzu: „Wenn du irgendeinen Mann von gesundem Menschenverstand finden kannst, der dir den Rat gibt, zu gehen, so will ich meine Zustimmung geben". Ich schrieb daher noch an demselben Abend und lehnte das Anerbieten ab. Am nächsten Morgen ging ich nach Maer, um für den 1. September bereit zu sein, und während ich zum Schießen ausgegangen war, schickte mein Onkel nach mir und bot an, mich nach Shrewsbury hinüberzufahren und mit meinem Vater zu sprechen, da er es für weise hielt, daß ich das Anerbieten annehme. Mein Vater behauptete immer, daß mein Onkel einer der verständigsten Männer der Welt sei, und gab deshalb sofort in der freundlichsten Weise seine Zustimmung. Ich war in Cambrigde ziemlich verschwenderisch gewesen, und um meinen Vater zu beruhigen, sagte ich ihm, daß „ich verteufelt geschickt sein müßte, wenn ich an Bord der „Beagle" mehr als das mir Ausgesetzte vertun wollte"; er entgegnete mir aber mit Lächeln: „Sie sagen mir aber alle, du seist sehr geschickt." ...

Am Tage darauf fuhr ich nach Cambridge zu HENSLOW und von da nach London zu FITZ-ROY, und alles war bald abgemacht. Später, als ich mit FITZ-ROY näher bekannt geworden war, erfuhr ich, daß ich sehr nahe daran gewesen wäre, zurückgewiesen zu werden, und zwar wegen der Form meiner Nase! Er war ein eifriger Anhänger LAVATERS und war der Überzeugung, daß er den Charakter eines Menschen nach der Form seiner Gesichtszüge beurteilen könne; und er bezweifelte es, ob irgend jemand mit meiner Nase hinreichende Energie und Entschlossenheit für diese Reise besitzen könne. Ich denke aber, er war später davon überzeugt, daß meine Nase falsch prophezeit hatte."

„Die Reise der „Beagle" ist das bei weitem bedeutungsvollste Ereignis in meinem Leben gewesen und hat meine ganze Karriere bestimmt; und doch hing sie von einem so nebensächlichen Umstande ab, wie von dem Angebot meines Onkels, mich dreißig Meilen weit nach Shrewsbury zu fahren, was wenige Onkel getan haben würden, und von einer so geringfügigen Kleinigkeit wie der Form meiner Nase. Ich habe stets gefühlt, daß ich der Reise die erste wirkliche Zucht oder Erziehung meines Geistes verdanke; ich wurde darauf geführt, mehreren Zweigen der Naturgeschichte eingehende Aufmerksamkeit zu widmen. Dadurch wurde meine Beobachtungskraft geschärft, obgleich sie schon gut entwickelt war."

„Ich brauche hier nicht auf die Erlebnisse der Reise zurückzukommen – wohin wir gefahren sind und was wir getan haben –, da ich eine hinreichend ausführliche Schilderung davon in meinem veröffentlichten „Tagebuch" gegeben habe."

Nach der Reise mit der „Beagle" vom 27. 12. 1831 bis zum 2. 10. 1836 folgte eine Zeit von zwei Jahren und drei Monaten, die DARWIN als die arbeitsreichste bezeichnet, die er je verlebt hatte, obgleich er sich gelegentlich unwohl fühlte und dadurch etwas Zeit verlor. Bis zu seiner Verheiratung mit seiner Cousine EMMA, geborene WEDGWOOD, lebte DARWIN in Cambridge, dann mit seiner Familie in London, schließlich vom 14. September 1842 an in Down. Nach der Reise mit der „Beagle" entstanden nun viele wissenschaftliche Abhandlungen, Monographien und Bücher. „Meine hauptsächlichste Freude und meine alleinige Beschäftigung während meines ganzen Lebens ist wissenschaftliches Arbeiten gewesen; und die Anregung durch derartige Arbeit läßt mich für eine gewisse Zeit mein tägliches Unbehagen vergessen oder drängt es wohl auch vollständig zurück. Aus meinem noch übrigen Leben habe ich daher nichts mehr zu berichten, mit Ausnahme der Veröffentlichung meiner verschiedenen Bücher. Vielleicht sind ein paar Einzelheiten darüber, wie sie entstanden sind, der Mitteilung wert."

Von der Vielzahl der Veröffentlichungen sollen noch zwei angeführt werden, die letzte und die bedeutendste.

„Ich habe jetzt (1. Mai 1881) das Manuskript eines kleinen Buches über „Die Bildung der Ackererde durch die Tätigkeit der Würmer" in die Druckerei geschickt. Es ist dies ein Gegenstand von nur geringer Bedeutung, und ich weiß nicht, ob er irgendwelche Leser interessieren wird; er hat mich aber interessiert. Das Buch ist die Vervollständigung eines kurzen Vortrages, den ich vor mehr als vierzig Jahren vor der Geologischen Gesellschaft gehalten habe, und hat alte geologische Gedanken in mir wieder geweckt."

Die Beschäftigung DARWINS mit den Regenwürmern geht bis in die Jahre 1838/1840 zurück. Sein Schwiegervater und Onkel, der auch die „Beagle"-Reise für empfehlenswert hielt, hatte ihn auf die Tätigkeit der Regenwürmer im Garten hingewiesen. DARWIN hatte auf Anregung des Onkels Schlacke und gebrannten Mergel auf grasbewachsenem, bearbeitetem und unbearbeitetem Boden ausgestreut und das Versinken beobachtet. Um ein Maß für das Absinken zu haben, wurde im Park von Down ein Worm-Stone (Wurm-Stein) aufgestellt. Die Regenwürmer graben unter dem Stein ihre Gänge, fressen die Erde, die sie an der Oberfläche gleich neben dem Stein ausscheiden. Die Gänge fallen unter dem Gewicht des Steines zusammen, und der Stein verschwindet schließlich vollständig in den Ausscheidungen der Würmer. Auf diese Weise haben die Regenwürmer mit ihrer regen Tätigkeit unschätzbare Kunstwerke des Altertums in die Erde versenkt und erhalten. Man schätzt, daß auf einem Hektar Wiesenboden bis zu 200 Millionen Regenwürmer ihre segensreiche Tätigkeit ausüben, im gepflegten und gepflügten Ackerboden geht ihre Zahl allerdings bis auf 1 Million zurück. DARWIN hat als erster Versuche mit Regenwürmern gemacht. In Blumentöpfen hat er Regenwürmer gehalten und gezüchtet. Viele Nächte verbrachte DARWIN an den Töpfen, beobachtete die Würmer, ergründete ihre Freßgewohnheiten und Lieblingsspeisen und schrieb seine Beobachtungen und Schlußfolgerungen auf. Es lohnt sich, sein Buch zu lesen.

Über die Entstehung seines bedeutendsten Buches „Über die Entstehung der Arten durch natürliche Zuchtwahl oder die Erhaltung der begünstigten Rassen im Kampf ums Dasein" berichtet DARWIN in seinen „Erinnerungen" selbst.

„Seit September 1854 widmete ich meine ganze Zeit dem Ordnen meiner ungeheuren Massen von Notizen, der Beobachtung und dem Experimentieren in bezug auf die Umwandlung der Arten. Während der Reise der „Beagle" hatte die Entdeckung großer fossiler Tiere, die mit einem Panzer, gleich dem der jetzt existierenden Gürteltiere, bedeckt waren, in der Pampasformation (Patagonien) einen tiefen Eindruck auf mich gemacht; zweitens ebenso die Art und Weise, in der beim Hinabgehen nach Süden über den Kontinent (Südamerikas) nahe verwandte Tiere einander vertreten, und drittens auch der südamerikanische Charakter

der meisten Naturerzeugnisse des Galapagosarchipels und ganz besonders die Art und Weise, wie sie auf einer jeden Insel der Gruppe unbedeutend verschieden sind; keine von den Inseln schien im geologischen Sinne des Wortes sehr alt zu sein. Es war offenbar, daß Tatsachen wie diese, ebenso wie viele andere, nur unter der Annahme erklärt werden konnten, daß die Arten allmählich modifiziert werden; und das Problem ließ mich nicht ruhen." „Im Oktober 1838, also fünfzehn Monate nachdem ich meine Untersuchungen systematisch angefangen habe, las ich zufällig zur Unterhaltung MALTHUS „Über die Bevölkerung", und da ich hinreichend darauf vorbereitet war, den überall stattfindenden Kampf um die Existenz zu würdigen, namentlich durch lange fortgesetzte Beobachtungen über die Lebensweise von Tieren und Pflanzen, kam mir sofort der Gedanke, daß unter solchen Umständen günstige Abänderungen dazu neigen, erhalten zu werden, und ungünstige, zerstört zu werden. Das Resultat hiervon würde die Bildung neuer Arten sein.

Hier hatte ich nun endlich eine Theorie, mit der ich arbeiten konnte; ich war aber so ängstlich darauf bedacht, jegliche Voreingenommenheit zu vermeiden, daß ich mich entschloß, eine Zeitlang auch nicht einmal die kürzeste Skizze davon niederzuschreiben. Im Juni 1842 gestattete ich mir zum ersten Male die Befriedigung, einen ganz kurzen Abriß meiner Theorie, 35 Seiten lang, mit Bleistift niederzuschreiben, und dieser wurde dann während des Sommers 1844 zu einem zweiten von 230 Seiten erweitert, den ich ordentlich umschrieben habe und noch besitze." „Anfang des Jahres 1856 riet mir LYELL, meine Ansichten ziemlich ausführlich niederzuschreiben, und ich begann auch sofort, dies in einem drei- oder viermal ausführlicherem Maße zu tun, als ich es später in meiner „Entstehung der Arten" getan habe; und doch war dies nur ein Auszug aus den Materialien, die ich gesammelt hatte; ich hielt mich an diesen Maßstab und erledigte etwa die Hälfte der Arbeit. Meine Pläne wurden aber zunichte gemacht; denn Anfang des Sommers 1858 schickte mir Mr. WALLACE, der sich damals im Malaiischen Archipel befand, eine Abhandlung „Über die Neigung der Varietäten, in unbestimmter Weise von dem ursprünglichen Typus abzuweichen", und diese Abhandlung enthielt genau dieselbe Theorie wie die meinige." „Ich machte aus dem 1856 in einem viel größeren Maßstab angefangenen Manuskript einen Auszug und vollendete den Band in demselben verkleinerten

Maßstabe. Derselbe kostete mich dreizehn Monate und zehn Tage harter Arbeit. Er wurde unter dem Titel „Origin of Species" (Entstehung der Arten) im November 1859 herausgegeben. Obgleich in den späteren Ausgaben vieles hinzugesetzt und korrigiert worden ist, ist es doch im wesentlichen das gleiche Buch geblieben. Es ist ohne Zweifel die Hauptarbeit meines Lebens."

„Ein anderes Element beim Erfolg des Buches war sein mäßiger Umfang; und diesen verdanke ich dem Erscheinen von Mr. WALLACES Abhandlung: hätte ich es in dem Maßstab veröffentlicht, in dem ich 1856 zu schreiben angefangen hatte, so würde das Buch vier- oder fünfmal so groß geworden sein als die „Entstehung der Arten", und da hätten nur sehr wenige die Geduld gehabt, es zu lesen."

Der Computer-Simulation von den Entwicklungsgesetzen, die DARWIN erkannt und aufgestellt hat, werden entsprechende Abschnitte aus seinem Buch „Über die Entstehung der Arten ..." vorangestellt.

4.2. Darwin und das Prinzip der natürlichen Auslese

In der Zusammenfassung des Kapitels 4. hat DARWIN formuliert, was er das „principle of natural selection" nennt, in der Übersetzung „Prinzip der natürlichen Zuchtwahl", oder wie es heute in der Evolutionstheorie bezeichnet wird, „Prinzip der natürlichen Auslese".

„Wenn unter sich ändernden Lebensbedingungen die organischen Wesen in beinahe allen Teilen ihres Baues individuelle Verschiedenheiten darbieten, was, wie ich glaube, nicht bestritten werden kann; wenn ferner wegen des geometrischen Verhältnisses ihrer Vermehrung alle Arten in irgendeinem Alter, zu irgendeiner Jahreszeit und in irgendeinem Jahre einen heftigen Kampf um ihr Dasein zu kämpfen haben, was sicher nicht zu leugnen ist: dann meine ich im Hinblick auf die unendliche Verwicklung der Beziehungen aller organischen Wesen zu einander und zu ihren Lebensbedingungen, welche eine endliche Verschiedenartigkeit einer ihnen vorteilhaften Organisation, Konstitution und Lebensweise verursachen, daß es eine ganz außerordentliche Tatsache sein würde, wenn nicht jeweils auch eine zu eines jeden Wesens eigener Wohlfahrt dienende Abänderung vorgekommen wäre, wie deren so viele vorgekommen, die dem Menschen vorteilhaft waren. Wenn aber solche für ein organisches Wesen nützliche Abänderungen wirklich vorkommen, so werden sicherlich die dadurch ausgezeichneten Individuen die meiste Aussicht haben, in dem Kampfe ums Dasein erhalten zu werden, und nach dem mächtigen Prinzip der Vererbung werden diese wieder danach streben, ähnlich ausgezeichnete Nachkommen zu bilden. Dies Prinzip der Erhaltung oder des Überlebens des Passendsten habe ich der Kürze wegen natürliche Zuchtwahl genannt; es führt zur Vervollkommnung eines jeden Geschöpfes seinen organischen und unorganischen Lebensbedingungen gegenüber und mithin auch in den meisten Fällen zu dem, was man als eine Vervollkommnung der Organisation ansehen muß. Demungeachtet werden tiefer stehende und einfache Formen lange andauern, wenn sie ihren einfachen Lebensbedingungen gut angepaßt sind."

In dem Buch „Das Spiel" (R. Piper & Co Verlag, München-Zürich 1975) mit dem Untertitel „Naturgesetze steuern den Zufall", haben MANFRED EIGEN und RUTHILD WINKLER das Kugelspiel „Selektion" vorgestellt. Die Regeln für das Spiel, um das Selektionsprinzip mit dem Computer nachzuempfinden, sind sehr einfach. Verblüffend ist das Ergebnis, das aus dem Computer-Modell stets hervorgeht, nach dem „Prinzip der Erhaltung oder Überlebens des Passendsten" bleibt stets nur ein einziger Sieger übrig, der am besten Angepaßte ist der Gewinner, der Überlebende.

Für die Durchführung des Kugelspiels „Selektion" ohne Computer benötigen wir folgende Gegenstände:

1. Ein quadratisches Spielbrett mit 6 mal 6 Feldern,
2. zwei verschiedenfarbige Würfel, wobei z. B. der blaue Würfel den Zeilenindex und der rote den Spaltenindex angibt, und
3. je 36 Kugeln in vier verschiedenen Farben (z. B. blau, rot, gelb und violett).

Bei der Arbeit mit dem Computer wird das alles durch das Rechenprogramm ersetzt, doch dazu später mehr. Zunächst zu den Spielregeln. Auf dem Spielbrett werden völlig regellos je 9 blaue, rote, gelbe und violette Kugeln angeordnet. Dann folgt der erste Schritt, der, wie alle folgenden, aus zweimaligem Würfeln mit den beiden verschiedenfarbigen Würfeln besteht. So werden im 1. Wurf mit dem blauen und roten

Würfel die Koordinaten eines Spielfeldes ermittelt. Die auf diesem Spielfeld befindliche Kugel wird entfernt, die Farbe an dieser Stelle also vernichtet. Im 2. Wurf werden die Koordinaten eines weiteren Spielfeldes ermittelt. Sollte sich zufällig das Leerfeld ergeben, so wird der 2. Wurf wiederholt. Auf dem erwürfelten Spielfeld befindet sich eine bestimmte Farbe. Sie wird auf dem Spielfeld belassen, die gleiche Farbe aber zugleich auf das Leerfeld gesetzt, das nach dem 1. Wurf erzeugt wurde. Dann beginnt der zweite Schritt mit dem 1. Wurf usw. Das Spiel ist beendet, wenn sich auf dem Spielbrett nur noch Kugeln genau einer Farbe befinden.

Nach unseren ersten Spielversuchen wollten wir zunächst kaum glauben, daß es überhaupt ein Spielende geben könne. Die Viertelstunden zerrannen uns buchstäblich unter den würfelnden Händen. Auch dem hartnäckigsten Spieler können wir diese Methode nicht empfehlen, denn mit rund 400 Schritten, also 800 Zweierwürfen, bis zum Spielende muß er mindestens rechnen. Es kann aber auch die dreifache Anzahl von Schritten erforderlich werden, und da dürfte ein Sonntag wohl fast um sein. Mit dem Computer ist die ganze Sache in rund 10 Minuten erledigt, sofern wir das richtige Programm parat haben. Es muß demnach Spielbrett, Würfel und die farbigen Kugeln ersetzen. Mit rund 50 Programmzeilen in BASIC wird alles bewerkstelligt, so wie es das Programm 10 zeigt.

Wird die Frage „Eiltempo gewünscht?“ in Programmzeile 20 mit JA beantwortet, dann werden alle PAUSE-Anweisungen im Programm mit der Zahl 1 belegt. Das kann, je nach eingesetztem BASIC-Interpreter, $^1/_{10}$ Sekunde, eine $^1/_{50}$ Sekunde oder auch ein anderer Zeitwert sein. Der eilige Nutzer kann auch alle PAUSE-Anweisungen aus dem Programm entfernen. Wer dem Spiel in aller Ruhe folgen möchte, der lehnt das Eiltempo mit der Antwort „NEIN“ ab. Wenn der Interpreter in 50stel-Sekunden-Schritten arbeitet, dann hat er mit P=150 (Zeile 40) zum Verfolgen jedes Wurfs drei Sekunden Zeit. Die Anweisungen FLASH 1 in den Zeilen 250 und 360 machen die markanten Stellen auf dem Bildschirm-Spielbrett durch Blinken deutlich. Anstelle der FLASH-Anweisung bieten einige Interpreter auch durch Änderung des Zahlenwerts der INK-Farbe (z. B. INK Farbzahl +16) die blinkende Wiedergabe. Im Eiltempo kommt das Blinken natürlich nicht zur Wirkung.

BASIC-Programm 10. SELEKTION

```
  10 REM SELEKTION
  20 INPUT "EILTEMPO GEWUENSCHT?
 (JA/NEIN) = ";K$
  30 IF K$="JA" THEN LET P=1: GO
 TO 60
  40 LET P=150
  50 REM 6*6-FELD ZEICHNEN
  60 FOR N=0 TO 6
  70 PLOT 104,16+N*24: DRAW 144,
0
  80 PLOT 104+N*24,16: DRAW 0,14
4
  90 NEXT N
 100 REM VEREINBARUNGEN
 110 DIM A$(6,6): LET K=1: RANDO
MIZE
 120 DEF FN A()=1+INT (RND*6)
 130 REM ZUFALLSFELD ERZEUGEN
 140 FOR I=1 TO 9
 150 LET B$="B": GO SUB 510
 160 LET B$="G": GO SUB 510
 170 LET B$="R": GO SUB 510
 180 LET B$="V": GO SUB 510
 190 NEXT I
 200 REM 1.WURF
 210 LET C1=FN A(): LET C2=FN A(
)
 220 PRINT AT 2,0;K;". SCHRITT"
 230 PRINT AT 6,1;"1. WURF=";C1;
":";C2: PRINT AT 8,1;"VERNICHTUN
G"
 240 PRINT AT 10,1;"DIESER": PRI
NT AT 12,1;"FARBE"
 250 PRINT AT 3*C1,3*C2+11; FLAS
H 1;A$(C1,C2)
 260 PAUSE P
 270 LET A$(C1,C2)=" ": REM LEER
ZEICHEN
 280 PRINT AT 3*C1,3*C2+11;A$(C1
,C2)
 290 REM 2.WURF
 300 LET C3=FN A(): LET C4=FN A(
)
 310 IF A$(C3,C4)=" " THEN GO TO
 300: REM LEERZEICHEN
 320 PRINT AT 15,1;"2. WURF=";C3
;":";C4
 330 PRINT AT 17,1;"FARBE ";A$(C
3,C4);" AUF"
 340 PRINT AT 19,1;"FELD ";C1;":
";C2
 350 LET A$(C1,C2)=A$(C3,C4)
 360 PRINT AT 3*C3,3*C4+11; FLAS
H 1;A$(C3,C4)
 370 PAUSE P
 380 PRINT AT 3*C3,3*C4+11; FLAS
H 0;A$(C3,C4)
 390 PRINT AT 3*C1,3*C2+11;A$(C1
,C2)
 400 REM ENDEBEDINGUNG
 410 FOR M=1 TO 6
 420 FOR N=1 TO 6
 430 IF A$(1,1)<>A$(M,N) THEN LE
T K=K+1: GO TO 210
 440 NEXT N
 450 NEXT M
 460 STOP
 500 REM UP-ZUFALLSFELD
 510 LET C1=FN A(): LET C2=FN A(
)
 520 IF A$(C1,C2)<>" " THEN GO T
O 510: REM LEERZEICHEN
 530 LET A$(C1,C2)=B$
 540 PRINT AT 3*C1,3*C2+11;A$(C1
,C2)
 550 RETURN
```

In den Zeilen 60 bis 90 werden die Spielfeldbegrenzungen auf den Bildschirm gezeichnet. Die DIM-Anweisung in Zeile 110 reserviert die 36 Spielfelder im Speicher des Computers, da er ja wissen muß, welche Farbe sich auf welchem Feld befindet. Die Anweisung RANDOMIZE sorgt für eine wirklich zufällig ausgewählte Anfangszahl einer Zufallszahlenreihe. Manche Interpreter besitzen diese Anweisung nicht, sie wird in diesem Fall einfach weggelassen. Andere Interpreter verlangen für die RND-Anweisung (Zeile 120) ein Argument, also RND(X). Leider reagieren die einzelnen Interpreter auf den Wert X unterschiedlich. In den meisten Fällen leistet ein Wert $X > 0$ das für unser Vorhaben Gewünschte. Fest steht, und das ist tröstlich, daß alle Zufallszahlengeneratoren mit der RND-Anweisung in BASIC Zufallszahlen z im Bereich $1 > z \geqq 0$ liefern. Damit ergibt der Ausdruck 1+INT(RND · 6) in Zeile 120 stets eine Augenzahl von 1 bis 6. Um diesen Ausdruck nicht stets neu schreiben zu müssen, vereinbaren wir ihn als selbst definierte Funktion A() [evtl. verlangt Ihr Interpreter auch ein Scheinargument in den Klammern, z. B. A(I)]. Obwohl die Funktion im hier vorgestellten Programm kein Argument besitzt, müssen doch die Klammern geschrieben werden.
Die Zeilen 140 bis 190 besorgen gemeinsam mit dem Unterprogramm (Zeilen 510 bis 550) die zufällige Verteilung der jeweils 9 Kugeln einer Farbe auf dem Spielfeld. Da für dieses Buch nur eine Schwarzweiß-Variante möglich ist, wurden die Farben durch die Buchstaben B, G, R und V ersetzt. Das Ersetzen der Buchstaben durch entsprechende PAPER-Farben ist mit einem farbtüchtigen Computer und einem Farbfernsehgerät kein Problem.
In Zeile 210 beginnt der 1. Wurf einschließlich Bildschirmdarstellung mit kleinem Protokoll. Die richtigen Positionen auf dem Bildschirm werden mit Hilfe der PRINT-AT-Anweisungen gefunden (Zeilen 250 und 280). Der Kommentar in Zeile 270 erinnert daran, daß zwischen den Anführungszeichen ein Leerzeichen stehen muß, was der Vernichtung der Farbe auf der entsprechenden Position C1, C2 im Speicher und auf dem Bildschirm entspricht. Der 2. Wurf, wiederum mit Protokoll, wird ab Programmzeile 300 realisiert. Die Position trägt die Bezeichnung C3, C4. Das „Kopieren" dieser Farbe auf das Leerfeld erfolgt in den Zeilen 350 (für den Speicher) und 390 (für den Bildschirm). Nach jedem Schritt muß mit der Endebedingung geprüft werden, ob nur

noch genau eine Farbe vorhanden ist. Das erfolgt in den Programmzeilen 410 bis 460. Hier hält der Computer auch bei Spielende an.
Nachdem wir uns in gemächlichem Tempo von der korrekten Einhaltung der Spielregeln überzeugt haben, können wir im Eiltempo einige Spiele absolvieren. Für 400 Schritte benötigt der Computer rund 4 Minuten. Das scheint etwa die Mindestschrittzahl zu sein, bei der eine einzige Farbe gesiegt hat. In solch einem Fall sind nach rund 150 Schritten noch drei und nach rund 300 Schritten nur noch zwei Farben auf dem Bildschirm-Spielbrett, die gegeneinander „kämpfen". Dies sind alles nur grobe Angaben, da den Zufall ja niemand voraussehen kann. Zum Schluß wollen wir noch eine hartnäckige Variante vorstellen. Bild 42 zeigt eine Ausgangsposition, die, natürlich wiederum dem Zufall unterlegen, erst nach 1184 Schritten (Bild 43) zum Spielende mit einem Sieg für die Farbe Blau (B) führte. Hartnäckig deshalb, weil auch in diesem Fall schon nach 300 Schritten nur noch zwei Farben „im Rennen" waren, die aber noch relativ lange gegeneinander „gekämpft" haben. In knapp 11 Minuten war der Kampf entschieden, unvorstellbar, wie lange Darwin mit zwei Würfeln und farbigen Kugeln benötigt hätte.

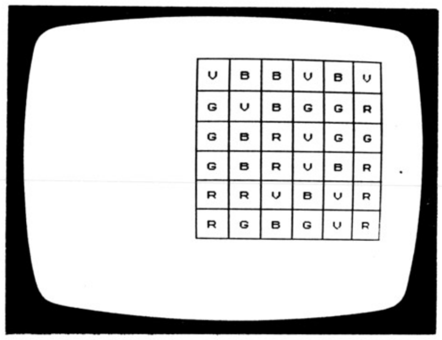


Bild 42. Zufällige Startposition für Kugelspiel „Selektion"

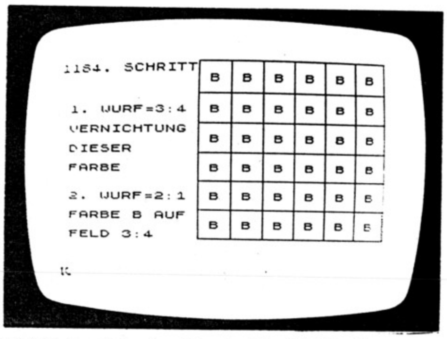


Bild 43. Ergebnis eines Kugelspiels „Selektion“

4.3. Die Anzahl unserer Vorfahren

Bei den Überlegungen, wer als der „Passendste“ oder der „Bestangepaßte“ überlebt, hat Darwin festgestellt, daß Fortpflanzung ohne Tod nicht möglich ist, und hat auch einige Berechnungen angestellt. Im Kapitel 3. („Über die Entstehung der Arten“) teilt er seine Gedanken mit, niedergeschrieben unter der Überschrift:

„Geometrisches Verhältnis der Zunahme“.

„Es gibt keine Ausnahme von der Regel, daß jedes organische Wesen sich auf natürliche Weise in einem so hohen Maße vermehrt, daß, wenn nicht Zerstörung einträte, die Erde bald von der Nachkommenschaft eines einzigen Paares bedeckt sein würde. Selbst der Mensch, welcher sich doch nur langsam vermehrt, verdoppelte seine Anzahl in fünfundzwanzig Jahren, und bei so fortschreitender Vervielfältigung würde die Welt schon in weniger als tausend Jahren buchstäblich keinen Raum mehr für seine Nachkommenschaft haben. Linné hat schon berechnet, daß, wenn eine einjährige Pflanze nur zwei Samen erzeugte (und es gibt keine Pflanze, die so wenig produktiv wäre) und ihre Sämlinge im nächsten Jahr wieder zwei gäben usw., sie in zwanzig Jahren schon

eine Million Pflanzen liefern würde. Man sieht den Elefanten als das sich am langsamsten vermehrende von allen bekannten Tieren an. Ich habe das wahrscheinliche Minimalverhältnis seiner natürlichen Vermehrung zu berechnen gesucht; die Voraussetzung wird die sicherste sein, daß seine Fortpflanzung erst mit dem dreißigsten Jahre beginne und bis zum neunzigsten Jahre währe, daß er in dieser Zeit sechs Junge zur Welt bringe und daß er hundert Jahre alt wird. Verhält es sich so, dann würden nach Verlauf von 740—750 Jahren nahezu neunzehn Millionen Elefanten, Nachkömmlinge des ersten Paares, am Leben sein.“
Die Berechnung der Anzahl unserer Nachkommen führt ebenso wie die Berechnung der Anzahl unserer Vorfahren zu Potenzen der Zahl 2. Die Zweierpotenzen haben bereits in einem anderen Beispiel ein verblüffendes Ergebnis gebracht.
Der indische Kaiser Sheram, so berichtet die Legende, sei von der Scharfsinnigkeit und der Vielfalt des Schachspiels so begeistert gewesen, daß er dem Erfinder Zeta eine würdige Belohnung versprochen habe. Zeta wünschte sich Weizenkörner, auf dem ersten Feld ein Weizenkorn, auf dem zweiten Feld 2 Weizenkörner, auf dem dritten Feld 4 Weizenkörner und auf jedem weiteren Feld die doppelte Anzahl wie auf dem vorhergehenden bis zum 64. Feld des Schachbretts. Der Kaiser hielt diesen Wunsch unwürdig seiner Großmut. Überrascht wurde der Kaiser durch die ungeheuer große Zahl der Weizenkörner, auf dem letzten Feld sind es $2^{64} = 1{,}845 \cdot 10^{19}$ Weizenkörner, die auf allen Weizenfeldern der Erde nicht geerntet werden können, so daß er für seine Belohnung nicht einstehen konnte.
Ein im 20. Jahrhundert lebender Mensch hat 2 Eltern, 4 Großeltern, 8 Urgroßeltern, 16 Ururgroßeltern usw. Die Eltern werden als Vorfahren 1. Ranges, Anzahl 2^1, bezeichnet, Großeltern als Vorfahren 2. Ranges, Anzahl 2^2, so ergibt sich für die Vorfahren n-ten Ranges die Anzahl 2^n. In 100 Jahren mögen 4 Generationen aufeinanderfolgen, so daß vor 100 Jahren $2^4 = 16$ Vorfahren (Ururgroßeltern) von jedem von uns auf der Erde gelebt haben. Rechnet man 3000 Jahre zurück, so ergibt sich der stattliche Zahlenwert $(2^4)^{30} = 2^{120} = 1{,}329 \cdot 10^{36}$. Damit ist ein normaler BASIC-Interpreter, der nur Zahlenwerte bis etwa 10^{38} verarbeiten kann, kurz vor seiner Leistungsgrenze angelangt. In 2000 Jahren oder 20 Jahrhunderten ergäbe sich für die Anzahl

der Vorfahren $(2^4)^{20} = 2^{80} = 1{,}2089 \cdot 10^{24}$. Die Erdoberfläche beträgt $A = 4 \cdot \pi \cdot r^2 = 4 \cdot \pi \cdot 6370^2\,\mathrm{km}^2 \approx 5 \cdot 10^8\,\mathrm{km}^2$. Auf 1 mm² Erdoberfläche müßten dann zu Beginn der Zeitrechnung 2400 Menschen gelebt haben. Ein solches Gedränge ist sowohl für die Anzahl der Nachkommen als auch für die Anzahl der Vorfahren unmöglich. Die Erdbevölkerung soll nach Trendberechnungen im Jahre 2000 etwa 8 Milliarden $(8 \cdot 10^9)$ Menschen erreichen. Das Vorgehen, die Anzahl der Nachkommen und Vorfahren zu berechnen, indem jede Generation zu einer Verdoppelung führt, ist fehlerhaft. Jeder Mensch hat zwar im allgemeinen 8 Urgroßeltern, vielleicht noch 16 Ururgroßeltern. Aber in irgendeiner Generation muß es durch Verheiratung von Verwandten untereinander dazu gekommen sein, daß die Anzahl der Vorfahren nicht mehr den Zweierpotenzen folgt. Wenn man sich über Mitmenschen ärgert, sollte man zurückhaltend sein. Die Wahrscheinlichkeit ist groß, einen Verwandten, wenn auch weitläufig und kaum nachweisbar, vor sich zu haben. DARWIN selbst macht unsere Rechnung zweifelhaft, indem er seine Cousine EMMA WEDGWOOD geheiratet hat, die Tochter seines Onkels JOSIAH mütterlicherseits. Diese Verwandtenheirat soll DARWIN in späteren Jahren veranlaßt haben, sich mit Fragen der Inzucht und natürlicher Auslese näher zu beschäftigen. Den Beweis für die Unzulässigkeit, die Anzahl der Nachkommen nach Zweierpotenzen zu berechnen, hat DARWIN selbst geliefert mit den beiden Gesetzen der Evolutionstheorie. Das Prinzip der natürlichen Auslese und das Überleben der Bestangepaßten führt immer auch zum Sterben und Aussterben einer Art oder Varietät. Der Kampf ums Dasein hat zur Folge, daß periodische Schwankungen an die Stelle der unbeschränkten Fortpflanzung treten.

4.4. Darwin und der Kampf ums Dasein

Über das Gesetz in der Evolutionstheorie „Kampf ums Dasein" ist sehr viel nachgedacht und geschrieben, hineininterpretiert und verfälscht worden, so daß es ratsam ist, DARWIN selbst zu Wort kommen zu lassen. Im Kapitel 3. („Über die Entstehung der Arten ...") trägt ein Abschnitt die Überschrift

„Der Ausdruck, Kampf ums Dasein, im weiten Sinne gebraucht."

„Ich will vorausschicken, daß ich diesen Ausdruck in einem weiten und metaphorischen Sinne gebrauche, unter dem sowohl die Abhängigkeit der Wesen voneinander, als auch, was wichtiger ist, nicht allein das Leben des Individuums, sondern auch Erfolg in bezug auf das Hinterlassen von Nachkommenschaft einbegriffen wird. Man kann mit Recht sagen, daß zwei hundeartige Raubtiere in Zeiten des Mangels um Nahrung und Leben miteinander kämpfen. Aber man kann auch sagen, eine Pflanze kämpfe am Rande der Wüste um ihr Dasein gegen die Trockenheit, obwohl es angemessener wäre zu sagen, sie hänge von der Feuchtigkeit ab. Von einer Pflanze, welche alljährlich tausend Samen erzeugt, unter welchen im Durchschnitt nur einer zur Entwicklung kommt, kann man noch richtiger sagen, sie kämpfe ums Dasein mit anderen Pflanzen derselben oder anderer Arten, welche bereits den Boden bekleiden. Die Mistel ist abhängig vom Apfelbaum und wenigen anderen Baumarten; doch kann man nur in einem weit hergeholten Sinne sagen, sie kämpfe mit diesen Bäumen; denn wenn zu viele dieser Schmarotzer auf demselben Baum wachsen, so wird er verkümmern und sterben. Wachsen aber mehrere Sämlinge derselben dicht auf einem Ast beisammen, so kann man in zutreffenderer Weise sagen, sie kämpfen miteinander. Da die Samen der Mistel von Vögeln ausgestreut werden, so hängt ihr Dasein mit von dem der Vögel ab, und man kann metaphorisch sagen, sie kämpfen mit anderen beerentragenden Pflanzen, damit sie die Vögel veranlasse, eher ihre Früchte zu verzehren und ihre Samen auszustreuen, als die der andern. In diesen mancherlei Bedeutungen, welche ineinander übergehen, gebrauche ich der Bequemlichkeit halber den allgemeinen Ausdruck ‚Kampf ums Dasein'."

„Ein Kampf ums Dasein tritt unvermeidlich ein in Folge des starken Verhältnisses, in welchem sich alle Organismen zu vermehren streben. Jedes Wesen, welches während seiner natürlichen Lebenszeit mehrere Eier oder Samen hervorbringt, muß während einer Periode seines Lebens oder zu einer gewissen Jahreszeit oder gelegentlich einmal in einem Jahre eine Zerstörung erfahren, sonst würde seine Zahl zufolge der geometrischen Zunahme rasch zu so außerordentlicher Größe anwachsen, daß keine Gegend das Erzeugte zu ernähren imstande wäre. Da daher mehr Individuen erzeugt werden, als möglicherweise fortbestehen können, so muß in jedem Falle ein Kampf um die Existenz eintreten, entweder zwischen den Individuen einer Art oder zwischen denen verschiedener Arten, oder zwischen ihnen und den äußeren Lebensbedingungen."

Wir wollen diesen „Kampf ums Dasein" im Darwinschen Sinn mit einem Computer simulieren. Für solche Simulationen biologischer oder ökologischer Sachverhalte ist der Computer sehr gut geeignet, denn er rechnet schnell und erzeugt Zufallszahlen in einem gewünschten Bereich. Allerdings müssen die Entwicklungsgesetze, in unserem einfachen Fall sagen wir besser Spielregeln, bekannt sein, nur dann können sie in ein Computerprogramm eingebaut werden.

In unserem „Kampfspiel" wirken vier Partner mit, nämlich Gras (G), Hasen (H), Füchse (F) und Jäger. Jeder Kleingärtner kennt zur Genüge die Wuchsfreude von Gras und Unkräutern (vornehmer: wildwachsende Kräuter). Er weiß auch, daß Hasen und Wildkaninchen die mühsam angelegten Gemüse- und Blumenkulturen als Nahrung bevorzugen. In unserem Simulationsprogramm haben wir nur Gras, deshalb werden sich die Computerhasen daran halten müssen, um nicht zu verhungern. Die Füchse wiederum haben bei uns nur Hasen als Nahrungsquelle, und die Jäger gehen in unserem Spiel zur Vereinfachung nur auf Fuchs-, aber nicht auf Hasenjagd.

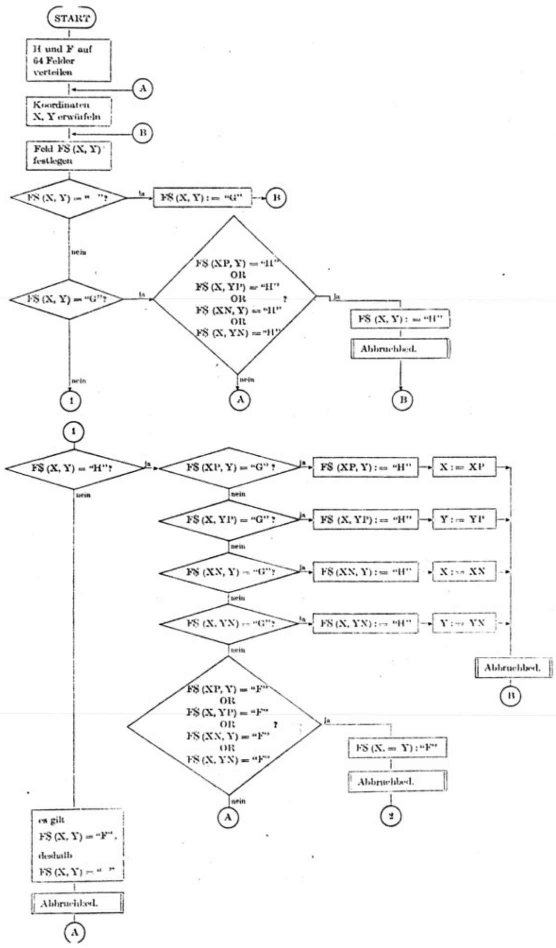
Solche ökologischen Prozesse wurden schon um die Jahrhundertwende von dem italienischen Mathematiker und Physiker Vito Volterra untersucht, der damit entscheidende Beiträge zur Biomathematik geliefert hat. Die Regeln für unser „Ökospiel" sehen zunächst recht einfach aus:

$\rightarrow$ G	– überall dort, wo Platz ist, wächst Gras
G+H $\rightarrow$ 2H	– die Vermehrung der Hasen hängt vom Nahrungsangebot ab, finden Hasen in unmittelbarer Nachbarschaft Gras, dann fressen sie es, und aus einem Hasen werden zwei
H+F$\rightarrow$2F	– die Vermehrung von Füchsen hängt auch von deren Nahrungsangebot ab, ein Fuchs frißt den in seiner Nachbarschaft befindlichen Hasen, und es entsteht ein weiterer Fuchs
F$\rightarrow$	– Jäger bieten der ungezügelten Vermehrung von Füchsen Paroli, indem sie Füchse schießen.

Das Stück Natur, wo sich das Ganze abspielen soll, wird auf einem 8-mal-8-Spielfeld abgebildet. Zum Erwürfeln der Koordinaten der einzelnen Felder benötigen wir deshalb zwei Oktaederwürfel (Achtflächner mit den Augenzahlen von 1 bis 8). Für den Computer mit seiner RND-Funktion ist so ein Würfel eine Kleinigkeit. Aus den bisher beschriebenen Spielregeln des Ökospiels wird klar, daß die Nachbarschaftsbeziehungen eine außerordentlich große Rolle spielen. Und dieses ständige Abfragen der orthogonalen Nachbarfelder des Spielfeldes hat uns für das BASIC-Programm auch die meisten Kopfschmerzen bereitet, wobei die Sache an den Randfeldern besonders kompliziert wird, da ja mindestens ein Nachbarfeld fehlt. Weitere Schwierigkeiten ergeben sich aus den Spielregelergänzungen, wie sie in dem Buch von Eigen und Winkler: Das Spiel, München 1975, angegeben sind. So müssen z. B. nach einer erfolgten Umwandlung auf einem Feld erneut alle Nachbarfelder daraufhin abgefragt werden, ob sich aus der neuen Situation nach den geltenden Spielregeln weitere Umwandlungen ergeben. Es darf erst dann wieder neu gewürfelt werden, wenn alle möglichen Umwandlungen erfolgt sind. Nicht nur wegen des erforderlichen Baus eines Oktaederwürfels, sondern auch wegen der anstrengenden Kontrolle aller Spielregelfeinheiten raten wir vom „handbetriebenen" Vollzug des Spiels auf einem Schachbrett ab. Der Computer kann das wirklich besser, vor allem schneller und mit peinlicher Genauigkeit.

Zur Erklärung aller Spielregeln nutzen wir den Programmablaufplan in Bild 44. Aus ihm entstand dann das entsprechende BASIC-Programm. Zum Programmstart werden Hasen (H) und Füchse (F) auf dem 8-mal-8-Spielfeld verteilt. Eine sinnvolle Startsituation ergibt sich bei 16 Hasen und 4 Füchsen, es sind aber auch beliebige andere Zahlenwerte möglich. Die Anordnung kann nach strategischen Gesichtspunkten oder, wie in unserem Fall, rein zufällig erfolgen. Jetzt wird das zuerst erwürfelte Feld mit den Koordinaten X,Y abgefragt. Ist es leer, dann erscheint dort ein G als Kennzeichnung für gewachsenes Gras. Daraufhin wird zum Punkt B gesprungen, denn jetzt müssen noch alle sich aus der neuen Situation ergebenden Spielvarianten abgefragt werden.

Befindet sich auf dem erwürfelten Feld Gras, dann werden sämtliche vier orthogonalen Nachbarfelder nach Hasen durchsucht. Dabei steht XP für X+1 und XN für X—1



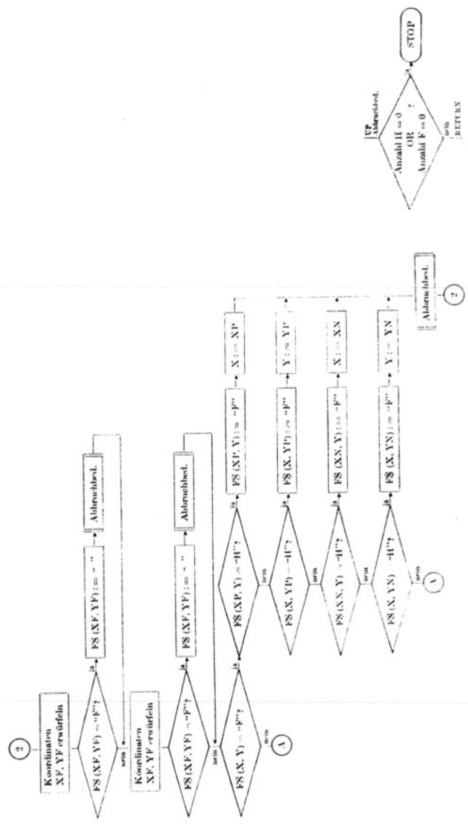


Bild 44. Programmablaufplan zum Ökospiel „Kampf ums Dasein“

(ebenso für Y). Befindet sich in der Nachbarschaft ein Hase, dann wird das G-Feld zu einem H-Feld gemacht, und die Überprüfung beginnt von neuem.
Ist das erwürfelte Feld mit einem Hasen belegt, dann werden die Nachbarfelder nach eventuell vorhandenem Gras durchsucht. Ein gefundenes G-Feld wird auch in diesem Fall zu einem H-Feld. Befindet sich in der Nachbarschaft aber ein Fuchs (F-Feld), dann entsteht aus dem H-Feld ein F-Feld. In diesem Fall tritt eine Spielregelerweiterung in Kraft. Sie besteht in zwei Extrawürfeln, die, wenn sie auf ein F-Feld treffen, zum Abschuß des Fuchses führen. Damit wird die Vermehrung von Füchsen gezügelt. Ist nach diesen zwei Extrawürfen immer noch ein Fuchs auf dem Feld (X,Y), dann muß auch noch dessen Nachbarschaft nach eventuell vorhandenen Hasen abgefragt werden. Ein eventuell vorhandenes H-Feld wird dann zu einem F-Feld. In diesem Fall tritt wieder die Spielregelerweiterung mit den zwei Extrawürfen in Kraft.
Wenn das erwürfelte Feld (X,Y) mit einem Fuchs belegt ist, dann wird er auf der Stelle abgeschossen, das Feld wird also leer, und es kann von neuem gewürfelt werden. Das Ökospiel endet, wenn entweder keine Hasen oder keine Füchse mehr vorhanden sind. Da die Anzahl der besetzten Felder mit Gras, Hasen und Füchsen im Programm protokolliert wird, gestaltet sich die Abbruchbedingung sehr einfach. Sie ist als Unterprogramm aufgebaut, so daß von den entsprechenden Stellen im Hauptprogramm aus geprüft werden kann.
Zu diesem Programmablaufplan gehört BASIC-Programm 11. Mit seinen rund 120 Programmzeilen zeigt es schon recht deutlich, was kleine Computer mit einem guten BASIC-Interpreter leisten können. Die im Programm auftretenden BORDER-, PAPER- und INK-Anweisungen beziehen sich auf Farbangaben des Bildschirmrands, des Hintergrunds des Bildschirmarbeitsfelds und der darauf zu setzenden Zeichen. Diese Angaben können auch weggelassen werden. Für die Benutzung der Anweisungen RANDOMIZE und RND verweisen wir auf die Bemerkungen zum BASIC-Programm „Selektion“ (Pragramm 10).
Mit der Programmzeile 55 wird erreicht, daß auch wirklich jedes Element des Feldes F$(I,J) mit einem Leerzeichen belegt wird. Manche Interpreter erledig endas automatisch bei der Felddimensionierung mit DIM F$(8,8), andere wiederum nicht.

BASIC-Programm 11.
OEKOSPIEL
„KAMPF UMS DASEIN“

```
   10 BORDER 4
   20 INPUT "ANZAHL HASEN=";HA: I
NPUT " ANZAHL FUECHSE=";FU
   30 CLS : GO SUB 1020: RANDOMIZ
E
   40 REM WUERFEL UND ANZEIGEPOSI
TION DEFINIEREN
   50 DEF FN Z()=1+INT (RND*8): D
IM F$(8,8)
   55 FOR I=1 TO 8: FOR J=1 TO 8:
 LET F$(I,J)=" ": NEXT J: NEXT I
   60 DEF FN X(X)=2*X-2: DEF FN Y
(Y)=2*Y+15
   70 REM HASEN UND FUECHSE VERTE
ILEN
   80 FOR N=1 TO HA
   90 LET X=FN Z(): LET Y=FN Z()
  100 IF F$(X,Y)<>" " THEN GO TO
90: REM LEERZ.
  110 LET F$(X,Y)="H": PRINT AT F
N X(X),FN Y(Y);F$(X,Y)
  120 NEXT N
  130 FOR N=1 TO FU
  140 LET X=FN Z(): LET Y=FN Z()
  150 IF F$(X,Y)<>" " THEN GO TO
140: REM LEERZ.
  160 LET F$(X,Y)="F": PRINT AT F
N X(X),FN Y(Y);F$(X,Y)
  170 NEXT N
  180 REM TEXTDRUCK
  190 LET K=0: LET GR=0: LET ER=0
  200 PRINT AT 0,0;"STAND NACH DE
M": PRINT AT 2,4;". WURF="
  210 PRINT AT 4,0;GR: PRINT AT 4
,4;"GRASEIN-"
  220 PRINT AT 5,4;"HEITEN (G)":
PRINT AT 7,0;HA
  230 PRINT AT 7,4;"HASEN (H)": P
RINT AT 9,0;FU
  240 PRINT AT 9,4;"FUECHSE (F)":
 PRINT AT 11,0;ER
  250 PRINT AT 11,4;"ERLEGTE": PR
INT AT 12,4;"FUECHSE"
  260 REM WUERFELN UND ENTSCHEIDE
N
  270 LET X=FN Z(): LET Y=FN Z():
 LET K=K+1
  280 PRINT AT 2,4-LEN (STR$ (K))
;K: PRINT AT 2,11;X;":";Y
  290 GO SUB 310: GO TO 410
  300 REM UP RANDFELDER UMWEISEN
  310 LET XP=X+1: LET XN=X-1: LET
 YP=Y+1: LET YN=Y-1
  320 IF X=1 AND Y=1 THEN LET XN=
X+1: LET YN=Y+1: GO TO 400
  330 IF X=8 AND Y=1 THEN LET XP=
X-1: LET YN=Y+1: GO TO 400
  340 IF X=1 AND Y=8 THEN LET XN=
X+1: LET YP=Y-1: GO TO 400
  350 IF X=8 AND Y=8 THEN LET XP=
X-1: LET YP=Y-1: GO TO 400
  360 IF X=1 THEN LET XN=X+1: GO
TO 400
  370 IF X=8 THEN LET XP=X-1: GO
TO 400
  380 IF Y=1 THEN LET YN=Y+1: GO
TO 400
  390 IF Y=8 THEN LET YP=Y-1: GO
TO 400
  400 RETURN
  410 IF F$(X,Y)<>" " THEN GO TO
480: REM LEERZ.
  420 REM LEERFELD
  430 LET F$(X,Y)="G": LET GR=GR+
1
```

```
 440 PRINT AT FN X(X),FN Y(Y);F$
(X,Y)
 450 PRINT AT 4,0;GR
 460 GO SUB 1130
 470 GO TO 280
 480 IF F$(X,Y)<>"G" THEN GO TO
560
 490 REM G-FELD
 500 IF F$(XP,Y)<>"H" AND F$(X,Y
P)<>"H" AND F$(XN,Y)<>"H" AND F$
(X,YN)<>"H" THEN GO TO 270
 510 LET F$(X,Y)="H": LET GR=GR-
1: LET HA=HA+1
 520 PRINT AT FN X(X),FN Y(Y);F$
(X,Y)
 530 PRINT AT 4,0;"   ": PRINT A
T 4,0;GR: PRINT AT 7,0;HA
 540 GO SUB 1130
 550 GO SUB 1200: GO TO 280
 560 IF F$(X,Y)<>"H" THEN GO TO
960
 570 REM H-FELD
 580 IF F$(XP,Y)="G" THEN LET A=
XP: LET B=Y: LET X=XP: GO TO 630
 590 IF F$(X,YP)="G" THEN LET A=
X: LET B=YP: LET Y=YP: GO TO 630
 600 IF F$(XN,Y)="G" THEN LET A=
XN: LET B=Y: LET X=XN: GO TO 630
 610 IF F$(X,YN)="G" THEN LET A=
X: LET B=YN: LET Y=YN: GO TO 630
 620 GO TO 680
 630 LET F$(A,B)="H": LET GR=GR-
1: LET HA=HA+1
 640 PRINT AT FN X(A),FN Y(B);F$
(A,B)
 650 PRINT AT 4,0;"   ": PRINT A
T 4,0;GR: PRINT AT 7,0;HA
 660 GO SUB 1130
 670 GO SUB 1200: GO TO 280
 680 IF F$(XP,Y)<>"F" AND F$(X,Y
P)<>"F" AND F$(XN,Y)<>"F" AND F$
(X,YN)<>"F" THEN GO TO 270
 690 LET F$(X,Y)="F": LET HA=HA-
1: LET FU=FU+1
 700 PRINT AT FN X(X),FN Y(Y);F$
(X,Y)
 710 PRINT AT 7,0;"   ": PRINT A
T 7,0;HA: PRINT AT 9,0;FU
 720 GO SUB 1130
 730 GO SUB 1200
 740 FOR N=1 TO 2
 750 LET XF=FN Z(): LET YF=FN Z(
): LET K=K+1
 760 PRINT AT 2,4-LEN (STR$ (K))
;K: PRINT AT 2,11;XF;":";YF
 770 IF F$(XF,YF)<>"F" THEN GO T
O 830
 780 LET F$(XF,YF)=" ": LET FU=F
U-1: LET ER=ER+1: REM LEERZ.
 790 PRINT AT FN X(XF),FN Y(YF);
F$(XF,YF)
 800 PRINT AT 9,0;"   ": PRINT A
T 9,0;FU: PRINT AT 11,0;ER
 810 GO SUB 1130
 820 GO SUB 1200
 830 NEXT N
 840 IF F$(X,Y)<>"F" THEN GO TO
270
 850 PRINT AT 2,4-LEN (STR$ (K))
;K: PRINT AT 2,11;X;":";Y
 860 IF F$(XP,Y)="H" THEN LET A=
XP: LET B=Y: LET X=XP: GO TO 910
 870 IF F$(X,YP)="H" THEN LET A=
X: LET B=YP: LET Y=YP: GO TO 910
 880 IF F$(XN,Y)="H" THEN LET A=
```



```
XN: LET B=Y: LET X=XN: GO TO 910
 890 IF F$(X,YN)="H" THEN LET A=
X: LET B=YN: LET Y=YN: GO TO 910
 900 GO TO 270
 910 LET F$(A,B)="F": LET HA=HA-
1: LET FU=FU+1
 920 PRINT AT FN X(A),FN Y(B);F$
(A,B)
 930 PRINT AT 7,0;"   ": PRINT A
T 7,0;HA: PRINT AT 9,0;FU
 940 GO SUB 1130
 950 GO SUB 1200: GO SUB 310: GO
TO 740
 960 REM F-FELD
 970 LET F$(X,Y)=" ": LET FU=FU-
1: LET ER=ER+1: REM LEERZ.
 980 PRINT AT FN X(X),FN Y(Y);F$
(X,Y)
 990 PRINT AT 9,0;"   ": PRINT A
T 9,0;FU: PRINT AT 11,0;ER
1000 GO SUB 1130
1010 GO SUB 1200: GO TO 270
1020 REM UP FELDER SCHWAERZEN
1030 FOR N=0 TO 31
1040 FOR M=15 TO 21
1050 PRINT PAPER 0;AT M,N;" ": R
EM LEERZ.
1060 NEXT M
1070 NEXT N
1080 FOR N=0 TO 14
1090 PRINT PAPER 0;AT N,16;" ":
REM LEERZ.
1100 NEXT N
1110 LET PL=0
1120 RETURN
1130 REM UP KURVEN ZEICHNEN
1140 LET PL=PL+1
1150 IF PL=256 THEN GO SUB 1030
1160 PLOT INK 7;PL,GR*1.5
1170 PLOT INK 7;PL,HA*1.5
1180 PLOT INK 7;PL,FU*1.5
1190 RETURN
1200 REM UP ABBRUCHBEDINGUNG
1210 IF HA=0 OR FU=0 THEN STOP
1220 RETURN
```

In Programmzeile 60 definieren wir zwei Funktionen, die die korrekte Positionierung von G, H, F oder Leerzeichen auf dem 8-mal-8-Feld vornehmen. Die Zeilen 300 bis 400 organisieren die Umweisung von nicht vorhandenen Nachbarfeldern am Rand, damit der Computer nicht durcheinander gerät. Die einzelnen REM-Anweisungen im Programm stellen mit den Kommentaren eine Verbindung zum Progammablaufplan in Bild 44 her.

Das Hauptprogramm endet bei Zeile 1010. Das Unterprogramm in den Zeilen 1020 bis 1120 kann bei Nichtbeachtung der Farbzuweisungen mit Ausnahme der Zeile 1110 LET PL=0 weggelassen werden. Das Zeichnen der drei Kurven für Gras (Variable G), Hasen (Variable H) und Füchse (Variable F) erledigt das Unterprogramm in den Zeilen 1130 bis 1190. Damit läßt sich der ökologische Prozeß ver-

folgen, wobei die Wiedergabequalität der Computergrafik uns nicht so recht befriedigte.
Kleincomputer bieten auch leider nicht die Möglichkeit, jede der drei Kurven in einer gesonderten Farbe darzustellen, da die maximale Farbauflösung nur 4 mal 8 oder 8 mal 8 Pixel beträgt. Das bedeutet, daß in solch einem Bildpunktfeld nur genau eine Vorder- und Hintergrundfarbe möglich ist.
Sollte die Bildschirmbreite für die grafische Darstellung eines Spiels nicht ausreichen, dann wird in Zeile 1150 die Löschung der Grafik und deren Fortsetzung am linken Bildschirmrand organisiert. Dazu wird nochmals auf das Unterprogramm FELDER SCHWAERZEN (Zeilen 1020 bis 1120) zurückgegriffen. Die Abbruchbedingung ist im Unterprogramm in den Zeilen 1200 bis 1220 untergebracht. Daraus ergibt sich ein Schönheitsfehler, da das Gesamtprogramm in einer Unterprogrammroutine abgebrochen wird. Das stellt aber kein Problem dar, weil jedes neue, mit RUN gestartete Spiel automatisch den GOSUB-Stapel im Computer löscht.
Eine mögliche Ausgangsposition mit 16 Hasen und 4 Füchsen zeigt Bild 45. Daraus entstand zufällig der Spielverlauf, wie ihn Bild 46 zeigt. Nach insgesamt 286 Würfen, wobei auch die zweifachen Extrawürfe bei der Umwandlung in ein F-Feld mitgezählt werden, sind sämtliche Hasen vom Spielfeld verschwunden. Das Gras hat die stattliche Anzahl von

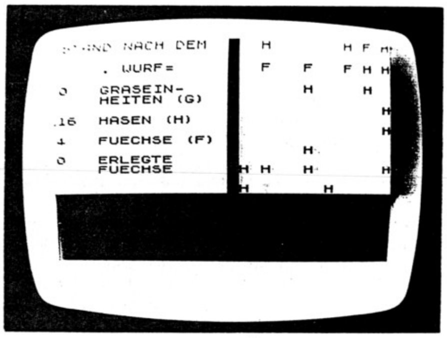


Bild 45. Ausgangsposition zum Ökospiel

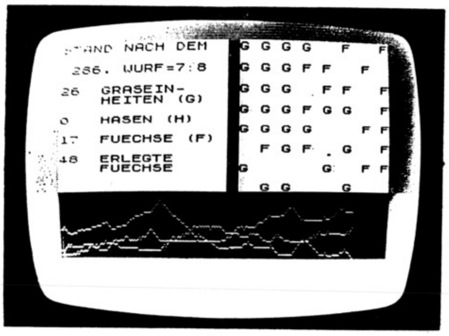


Bild 46. Kurvenverlauf zu Ökospiel

26 Einheiten erreicht, und insgesamt 17 Füchse finden nun keine Nahrung mehr. Interessanter als der Spielendstand ist aber der Spielverlauf, den wir von der grafischen Darstellung ablesen können. Durch die fehlende Farbe und die mangelhafte Auflösung der Computergrafik wird die Verfolgung des Spielverlaufs aber erheblich erschwert. Beginn und Ende einer jeden der drei Kurven erleichtern uns die Sache etwas. Zu Beginn stellt die obere Kurve die 16 Hasen, die mittlere die 4 Füchse und die untere das Gras dar. Am Ende hat die Kurve des Grases mit 26 Einheiten den höchsten Ordinatenwert. Die mittlere Kurve stellt die 17 Füchse dar, und die Kurve mit dem Ordinatenwert Null ist die „Hasenkurve".
In der ersten Phase der Spielentwicklung wächst die Anzahl der Hasen und der Graseinheiten beständig, während die Füchse ein ziemlich klägliches Dasein fristen. Die sich kreuzenden Hasen- und Fuchskurven zeigen in der zweiten Phase, daß die Anzahl der Füchse steigt und die der Hasen abnimmt. Diese Abnahme der Hasen wiederum führt in der folgenden Phase zu einer beständigen Zunahme von Graseinheiten. Bis zum Spielende wächst das Gras kontinuierlich weiter, während alle Hasen von den Füchsen gefressen werden. Die ganze Simulation ist in reichlich 2 Minuten erledigt, so schnell kann auch der gierigste Fuchs seine Nahrung nicht verdauen. Jedes neue Spiel ergibt durch andere Zufalls-

zahlen auch andere Spielverläufe, wobei in den meisten Fällen die Hasen unterliegen. Weitere Variationsmöglichkeiten ergeben sich durch die Änderung der Anfangszahl von Hasen und Füchsen. Hier ist es auch möglich, mit RANDOMIZE X (X>0) oder einem entsprechenden Argument für die RND-Anweisung stets die gleiche Zufallszahlenreihe zu benutzen und so den Spielverlauf in Abhängigkeit von der Ausgangssituation zu verfolgen. Den Kleingärtnern wird dieses Ökospiel aber nichts nützen, denn fehlende Füchse und vorhandene Gemüsekulturen verlangen nach anderen Spielregeln.

5. Schluß mit dem Computer (?)

Das vorliegende Buch ist zu Ende, die Arbeit mit dem Computer hat aber gerade erst begonnen. Was sind schon 16 Jahre Mikrocomputertechnik (der erste Mikroprozessor erschien 1971 auf dem Markt) gegenüber mehr als 2000 Jahren Naturwissenschaft? Unser Buch sollte unterhalten, einige Fähigkeiten des Kleincomputers zeigen, vor allem aber auch ernüchtern. Wir wollten den Euphorikern und zugleich den Maschinenstürmern ein wenig die Augen öffnen.

Aus der Sicht des Euphorikers kann der Computer alles. Er nimmt dem Menschen das Denken ab, forscht, schafft neue Lösungen, formuliert die Patentansprüche und kümmert sich auch noch um die Erfindervergütungen. Er ist für ihn das, was für den Bauern ein eierlegendes Milchwollschafschwein wäre. Wir hoffen, daß wir diese Illusion zerstören konnten. Zugleich müssen wir aber hinzufügen, daß nur ein winziger Teil der Fähigkeiten, die im Computer, vor allem in größeren Anlagen, stecken, von uns genutzt wurde. Von den eingangs genannten Computerleistungen wurden nur zwei richtig genutzt. Das waren die Möglichkeiten des schnellen und genauen Rechnens und der grafischen Darstellung von Sachverhalten. Viele andere Bücher zeigen, daß Computer noch vieles mehr können. Und der englische Mathematiker A. M. Turing (1918—1954) bewegte sich am Rande der Euphorie, als er bemerkte: „Sage mir exakt, worin deiner Meinung nach der Mensch einer Maschine überlegen ist, und ich werde dir einen Computer bauen, der diese Meinung widerlegt.“

Der Maschinenstürmer hingegen formuliert seinen Standpunkt etwa so: Eines Tages wird es uns schon noch gelingen, eine Maschine zu bauen, die so klug ist, daß sie ihre Arbeit von Menschen machen läßt. Wer über diese Feststellung schmunzelnd nachdenkt, der ist auf dem richtigen Weg in das Zeitalter neuartiger Informations- und Kommunikationstechnologien. Aber dieser Weg ist mit einer gehörigen

Portion Wissen gepflastert, das wiederum einen kühlen Kopf verlangt, wobei wir wieder beim Menschen wären.

Natürlich konnten wir die Frage „Was wäre, wenn KEPLER einen Computer gehabt hätte?“ nicht beantworten. Die Fragestellung erinnert an einen Erfinder, der mit Hilfe einer Ideenfindungsmethode (Ideenkonferenz, morphologische Methode und viele andere) eine Erfindung gemacht hat. Fragen Sie ihn bitte, ob er zu dieser Erfindung auch ohne Anwendung solcher Methoden gekommen wäre. Er wird vermutlich auf die Methode als ein Werkzeug verweisen, das ihm Zeit gespart und Anregungen gegeben hat. Ähnlich verhält es sich auch mit anderen „Denkzeugen“, auch mit dem Computer.

Sicher hätte DARWIN Zeit gespart, wenn er mit dem Computer Räuber-Beute-Systeme mit den verschiedensten Ausgangsbedingungen und „Spielregeln“ simuliert hätte. Vielleicht wäre er dadurch auch zu weiteren Untersuchungen angeregt worden. Auch für KEPLER wäre vermutlich die Entstehung der Spiralnebel auf dem Bildschirm Bestätigung und Vergnügen zugleich gewesen. Darüber hinaus hätte er mit einem angeschlossenen Drucker den ganzen Hof mit Horoskopen „versorgen“ können. Auch ARCHIMEDES hätte mit Freude der Entstehung „seiner“ Spirale auf dem Bildschirm zugeschaut und wäre vielleicht zu weiterführenden Arbeiten angeregt worden.

Aber wir sehen schon, über die Anregungsfunktion wäre ein Computer dieser Leistungsklasse nicht hinausgekommen. Es bleibt abzuwarten, welche Leistungserweiterungen Computer der 5. Generation, Expertensysteme und all das, was gegenwärtig an Forschungsarbeit zum Thema Künstliche Intelligenz getan wird, tatsächlich bieten werden. Eines ist dabei sicher: Zur Schaffung entsprechender Hard- und Software muß der Mensch die wesentlichen Leistungen erbringen.