

A maior parte dos microcomputadores dispõe actualmente resolução visual e de instruções gráficas que permitem a representação tridimensional.

Esta obra propõe-se, com o concurso de numerosos exemplos concretos, familiarizar o leitor com todos os aspectos do grafismo a três dimensões. A perspectiva cavaleira, a perspectiva cónica, a representação dos prismas, pirâmides, cones, cilindros, poliedros regulares, superfícies de equação $z = f(x, y)$ são alguns dos tópicos abordados ao longo dos capítulos. Os programas, muito acessíveis, foram desenvolvidos no ZX Spectrum, mas são facilmente transponíveis para muitos outros tipos de computadores.

COLECCÃO SISTEMAS

1. A INFORMATICA NA ESCOLA, Manual de Utilização do ZX Spectrum (e tc 2065), *Luis de Campos*
2. GUIA DOS MICROPROCESSADORES, *E. A. Parr*
3. INICIAÇÃO A BASE DE DADOS, *François Fargette*
4. PROGRAMAÇÃO DE COMPUTADORES EM PASCAL, *David Lightfoot*
5. OS SISTEMAS OPERATIVOS, *A. M. Lister*
6. O SISTEMA OPERATIVO DO SPECTRUM ROM DISASSEMBLY, *Ian Logan e Frank O'Hara*
7. PROGRAMAÇÃO DE COMPUTADORES EM COBOL, *Melinda Fisher*
8. PROGRAMAÇÃO DE COMPUTADORES EM BASIC, *L. R. Carter e E. Huzar*
9. PROGRAMAÇÃO EM LINGUAGEM C, *R. E. Berry e B. A. E. Meekings*
10. PROGRAMAÇÃO EM BASIC MSX, *L. R. Carter e E. Huzar*
11. PROGRAMAÇÃO EM dBASE II, *René Cohen*
12. PROGRAMAÇÃO EM FORTH, *Steve Oakley*
13. GRAFISMOS A 3 DIMENSÕES, *Michel Rousselet*

EDITORIAL

PRESENÇA

Michel Rousselet



GRAFISMOS A 3 DIMENSÕES



Michel Rousselet

GRAFISMOS A 3 DIMENSÕES

EDITORIAL  PRESENÇA

Para Micheline

Desejo agradecer à SOGITEC a sua amabilidade ao autorizar-me a utilizar e reproduzir certos documentos (fotografias do primeiro capítulo).

FICHA TÉCNICA

Título original: *Graphisme 3 D*
Autor: *Michel Rousselet*
Copyright © 1985 — ETSF
Tradução: © 1986, Lisboa, Editorial Presença, Lda.
Tradutor: *Eduardo Nogueira*
Capa: *António Marques*
Fotocomposição: *Textype — Lisboa*
Impressão e Acabamento: *Tipografia Guerra — Viseu*
1.ª edição, Lisboa, 1986

Reservados todos os direitos
para a língua portuguesa à
EDITORIAL PRESENÇA, LDA.
Rua Augusto Gil, 35-A 1000 Lisboa

Os programas apresentados nesta obra deverão permitir, espero, ao leitor não especialista iniciar-se em diferentes aspectos do grafismo a três dimensões: representação de objectos usuais em perspectiva, eliminação das partes escondidas à vista, visualização de superfícies diversas, etc.

Realizado em Basic ZX Spectrum, cada um destes programas utiliza apenas duas instruções gráficas: PLOT e DRAW.

Para traçar um segmento de extremidades $M_1 = (x_1, y_1)$ e $M_2 = (x_2, y_2)$ faz-se:

PLOT X1,Y1 : DRAW X2-X1, Y2-Y1

Para passar estes programas para outro microcomputador, bastará substituir estas duas instruções pelos seus equivalentes.

Faremos por exemplo:

- LINE (X1,Y1)–(X2,Y2) em M05 e TO 7/70
- CURSET X1,Y1 : DRAW X2-X1, Y2-Y1 em Oric-Atmos
- PLOT X1,Y1 : DRAW X2,Y2 , ou ainda
PLOT X1,Y1 : DRAW X2-X1, Y2-Y1 no Amstrad
- HLINE (X1,Y1) TO (X2,Y2) no Apple II E.

Algumas outras alterações se tornarão sem dúvida necessárias: Escrever Sin (x) em vez de Sin x, suprimir a instrução LET, ter em conta uma resolução gráfica diferente, etc.

Como se vê, nada verdadeiramente difícil.

Os conhecimentos matemáticos necessários à leitura desta obra não são de nível elevado. As funções trigonométricas habituais, uma boa familiarização com as coordenadas cartesianas, a manipulação elementar dos vectores deverão bastar. Todas as outras noções utilizadas — produto vectorial, produto escalar, bases — são explicadas ao longo da obra.

Devido à lentidão da Basic, certos aspectos do grafismo a três dimensões não foram aqui abordados. A *animação* necessita de 24 imagens por segundo e pressupõe portanto o recurso a uma linguagem assembly.

A coloração de superfícies, o desenho de sombras, a obtenção de texturas e de transparências exigem demasiadas operações para serem consideradas num microcomputador de tipo familiar. Talvez mais tarde, quando dispusermos de 32 bits...

GENERALIDADES SOBRE GRAFISMOS A TRÊS DIMENSÕES

A expressão «grafismos a três dimensões» designa o conjunto de métodos que permitem criar, graças a meios informáticos, vistas em perspectiva dos objectos mais diversos.

Distinguem-se principalmente dois tipos de imagens 3D:

- As *imagens de arame* utilizadas em CAD (Concepção auxiliada por computador). O objecto a representar é esquematizado por uma superfície poliédrica de que se desenhavam apenas as arestas (figuras 1 e 2).

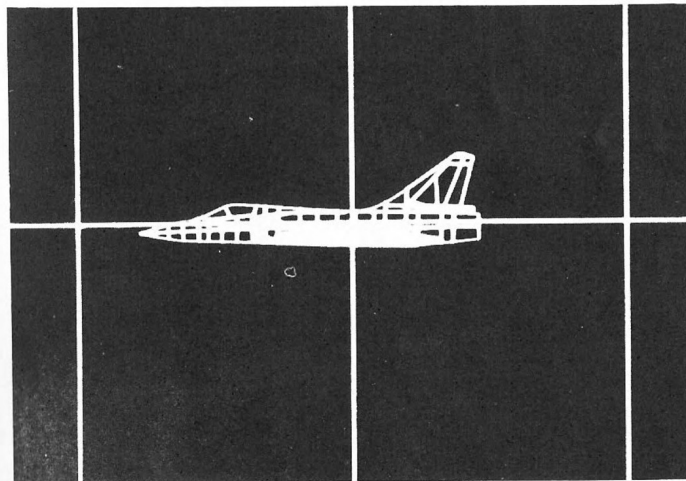


Fig. 1

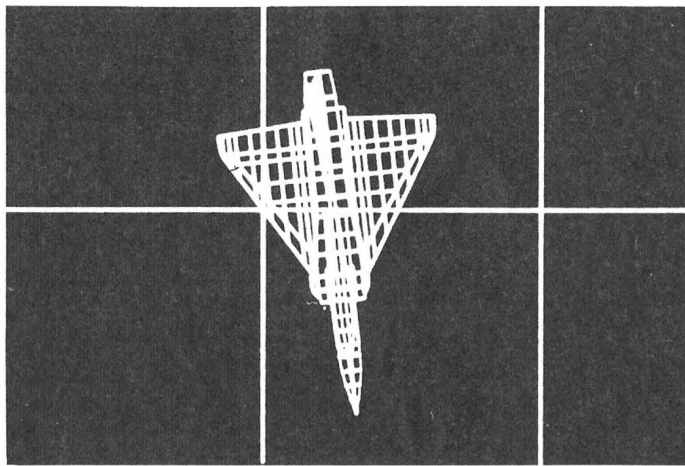


Fig. 2

A este tipo de imagem ligam-se também as representações de superfícies matemáticas (fig. 3).

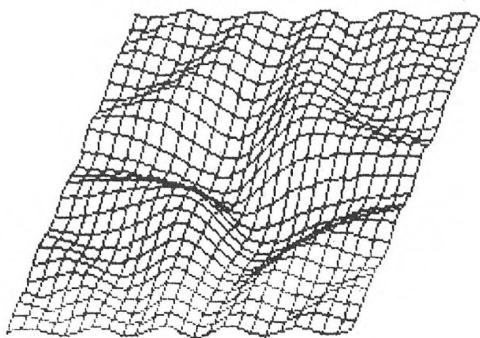


Fig. 3

— As *imagens de síntese* apresentam um carácter realista muito mais completo (figuras 4, 5, 6, 7).

A criação de uma imagem tridimensional é um processo longo e complexo que engloba três etapas:

- descrição numérica do objecto a representar;
- cálculo da imagem;
- produção dessa imagem num terminal gráfico.

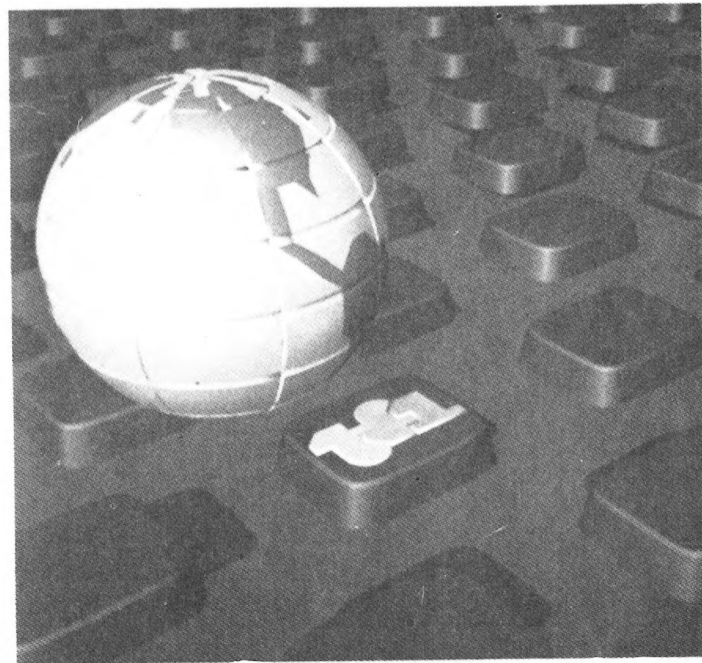


Fig. 4

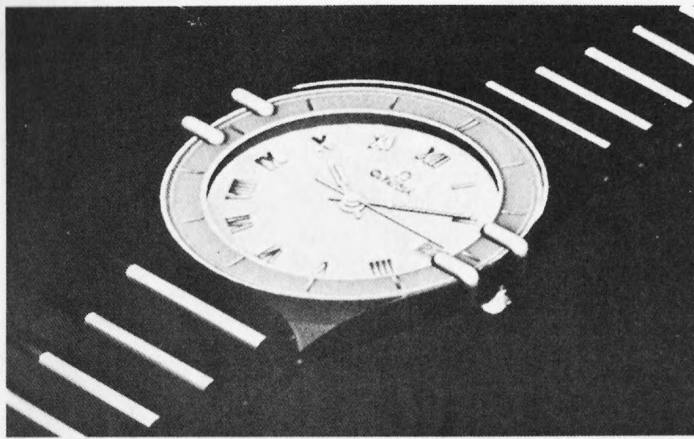


Fig. 5

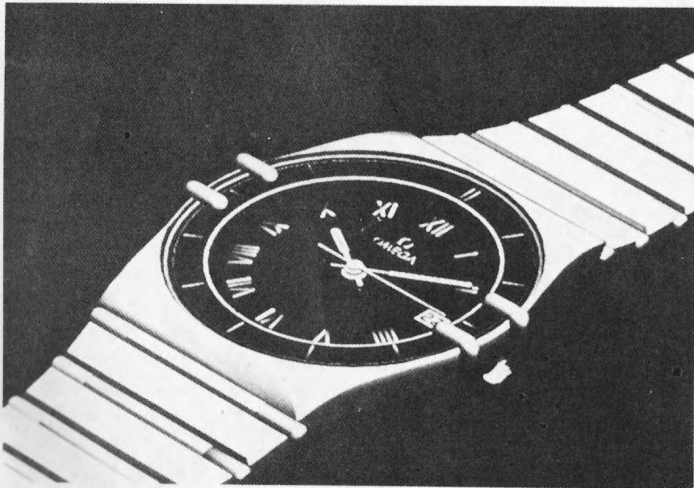


Fig. 6

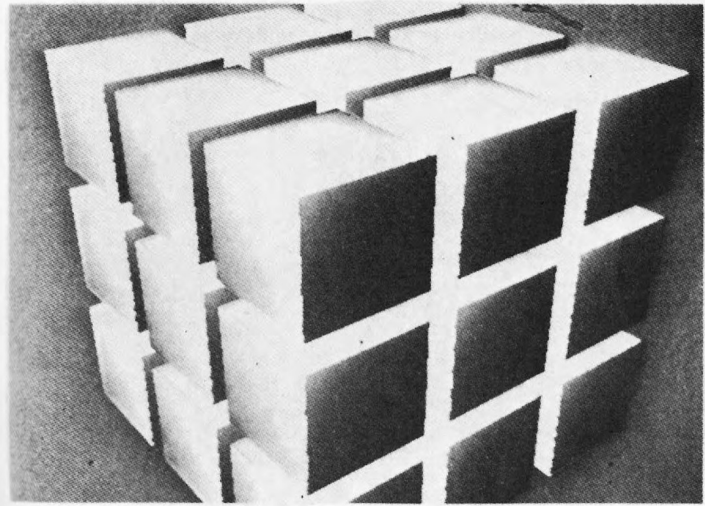


Fig. 7

1 Descrição de um objecto

Para dar uma imagem a três dimensões de um objecto qualquer, é necessário realizar uma maqueta numérica desse objecto. Os dados necessários serão de dois tipos: os dados geométricos e os dados de cor.

1. Os dados geométricos

Estes dados permitem definir a forma do objecto, a posição do observador, o ângulo do campo de visão, etc.

Utiliza-se a geometria analítica: um ponto do espaço é representado por três coordenadas, uma recta por uma representação paramétrica, um plano por uma equação.

As superfícies mais complexas são decompostas em superfícies elementares, em geral triângulos ou quadriláteros (figura 8).

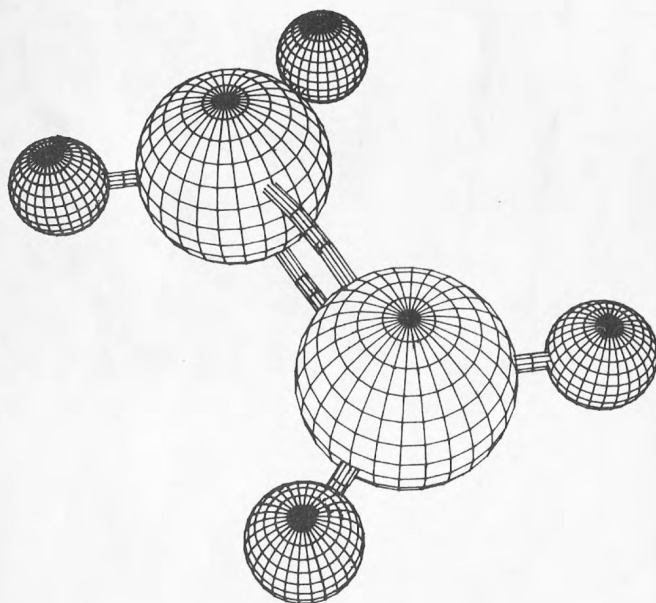


Fig. 8. — Representação «em arame» de uma molécula de etileno (C_2H_4).
(Doc. SOGITEC).

2. As coordenadas de cor

Referem-se ao aspecto das superfícies. Procura-se simular a textura dos materiais, os reflexos, as transparências, as sombras projectadas e, naturalmente, as cores propriamente ditas.

Na figura 9 mostra-se uma simulação de reflexos.

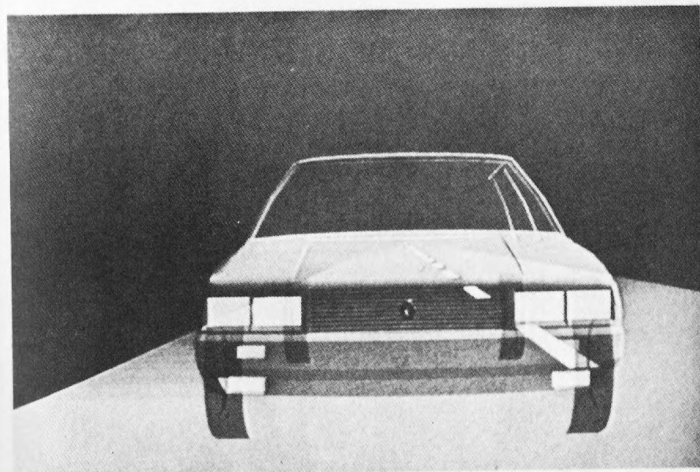


Fig. 9

2 O cálculo de uma imagem

Este cálculo é efectuado em duas etapas.

1. Primeira etapa

A primeira etapa consiste em calcular a perspectiva do objecto. Trata-se de associar a cada ponto (x, y, z) do espaço um ponto (u, v) de um plano de projecção anteriormente escolhido.

São possíveis diversas soluções. Pode-se até simular uma objectiva fotográfica de tipo «olho de peixe», ou deformações de qualquer tipo na geometria da imagem.

2. Segunda etapa

Na segunda parte do cálculo, procede-se à coloração das diferentes superfícies em função dos dados de cores, assim como à eliminação das partes escondidas do objecto.

3 Produção da imagem

Uma vez calculada a imagem, resta ainda efectuar três operações:

- Corte do objecto;
- Enquadramento;
- Traçado propriamente dito.

1. Corte da imagem

Conforme a posição do observador, certas partes do objecto encontram-se situadas fora do seu campo de visão.

Nem todas as partes calculadas se encontram portanto numa posição visível, sendo então necessário *cortar* a imagem.

2. Enquadramento

Todos os pontos do objecto são conhecidos pelas suas coordenadas no plano de projecção. Normalmente, é necessário ampliar ou reduzir as dimensões desta imagem, de modo a adaptá-la ao tamanho do visor. Esta operação será designada por «enquadramento» da imagem.

3. Desenho do objecto

A duração desta última operação pode ser extremamente variável conforme se desenha ou não ponto a ponto, ou se dê cor aos objectos ou não.

4 Acção sobre a imagem

Para que uma imagem se apresente a três dimensões, não basta que restitua de maneira conveniente a profundidade e o relevo; é também necessário poder transformá-la de maneira interactiva.

A partir do teclado, deve poder efectuar-se três tipos de manipulações:

1. Deve poder alterar-se as condições em que é visto o objecto representado: posição do observador, condições de iluminação e visibilidade, etc.
2. Deve poder modificar-se a posição do objecto utilizando diferentes tipos de deslocamentos, principalmente translações

e rotações. Assim, a figura 10 representa, após deslocamento, o mesmo objecto da figura 9.

3. Pode igualmente modificar-se a coloração das superfícies, utilizando mesmo cores «falsas».

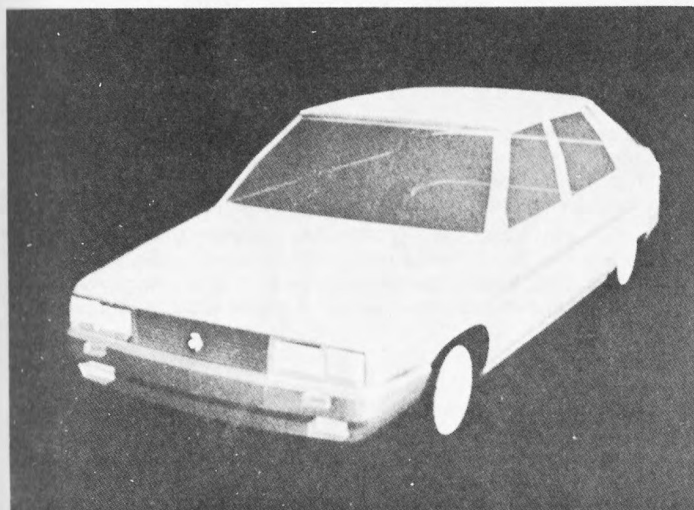


Fig. 10

5 O material

Para produzir imagens de síntese, uma empresa como a Sogitec francesa utiliza um gerador de imagens composto por dois computadores.

O primeiro é uma máquina de uso geral com 512 Kbytes de memória RAM, utilizando um disco de 80 Mbytes.

O segundo é uma máquina de cálculo rápido.

Este conjunto permite criar imagens com 16 milhões de tonalidades, ou tratar 20 000 facas para proceder à eliminação das partes escondidas. O tempo de cálculo das imagens depende da sua complexidade e varia entre alguns minutos e várias horas.

Depois de calculadas, as imagens são transferidas para uma memória numérica e restituídas à cadência de 25 imagens por segundo.

COORDENADAS CARTESIANAS — VECTORES

O espaço físico é descrito como um conjunto de pontos.

A escolha de um referencial apropriado permite definir a posição de um ponto qualquer graças a três coordenadas.

A qualquer par de pontos (A, B) pode-se sempre associar um vector que será denotado por \overrightarrow{AB} : esta possibilidade transforma o cálculo vectorial num instrumento particularmente cómodo.

Neste capítulo, vamos portanto proceder à apresentação de algumas regras fundamentais relativas a referenciais, bases e operações sobre vectores.

1 Coordenadas cartesianas

1. Consideremos, no espaço, três rectas graduadas com a mesma origem 0, perpendiculares entre si (figura 1).

Estas três rectas graduadas formam um referencial cartesiano ortogonal; o ponto 0 é a origem do referencial.

Se as graduações forem as mesmas em cada um dos eixos do referencial, este é ortonormado.

2. Qualquer ponto do espaço é caracterizado pelas suas coordenadas: a abcissa x , a profundidade y e a altitude (ou cota) z .

3. Existem duas maneiras diferentes de orientar um referencial ortonormado: pode-se escolher o sentido directo ou o sentido retrógrado.

Para diferenciar estas duas orientações possíveis, é prático recorrer a um observador colocado ao longo do eixo OZ, com os pés em O e a cabeça na direcção Z. Este observador olha na direcção OX.

Se vê o eixo OY para a sua esquerda, o referencial é considerado no sentido directo (figura 2).

Se vê o eixo OY para a sua direita, o referencial é considerado no sentido retrógrado (figura 3).

4. Ao longo deste livro utilizar-se-ão sempre referenciais no sentido directo.

Por convenção, o eixo OZ designará sempre o eixo vertical.

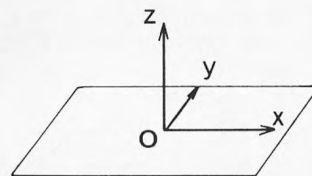


Fig. 1

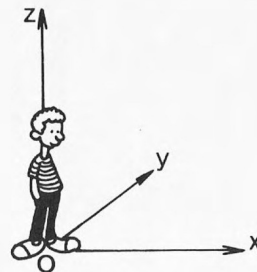


Fig. 2

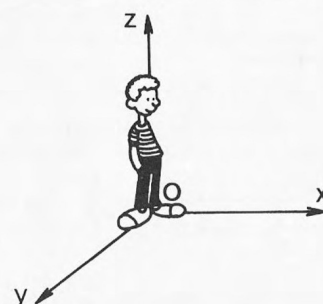


Fig. 3

2 Bases ortonormadas

1. Seja $OXYZ$ um referencial ortonormado e sejam A , B e C os pontos marcados 1 em cada um dos eixos (figura 4).

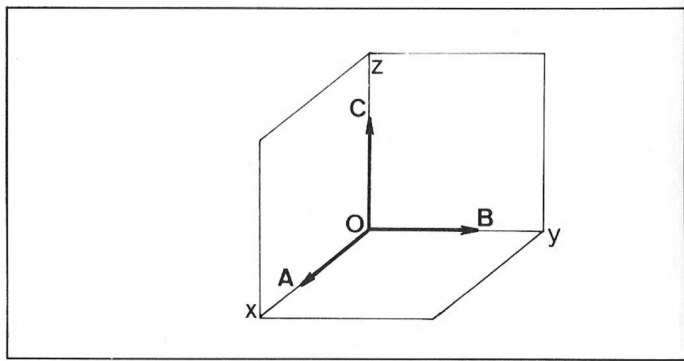


Fig. 4

Os vectores \vec{OA} , \vec{OB} e \vec{OC} têm um comprimento unitário: são vectores unitários.

Façamos $\vec{OA} = \vec{i}$, $\vec{OB} = \vec{j}$ e $\vec{OC} = \vec{k}$; diremos que os três vectores \vec{i} , \vec{j} e \vec{k} formam uma base ortonormada do espaço.

2. Sendo o espaço organizado relativamente a um referencial ortonormado $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, seja $M = (x, y, z)$ um ponto qualquer. Chamemos m à projecção ortogonal de M sobre o plano OXY , H à projecção ortogonal de m sobre o eixo OX e K à projecção ortogonal de m sobre o eixo OY .

Na figura 5 vê-se facilmente que $\vec{OM} = \vec{Om} + m\vec{M} = \vec{OH} + \vec{OK} + \vec{OL}$.

Como $\vec{OH} = x\vec{i}$, $\vec{OK} = y\vec{j}$ e $\vec{OL} = z\vec{k}$, obtemos

$$\vec{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}.$$

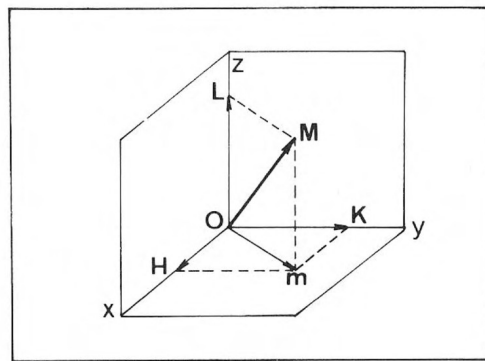


Fig. 5

3 Coordenadas e norma de um vector

1. Seja $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ um referencial ortonormado e sejam

$$A = (x_A, y_A, z_A)$$

e

$$B = (x_B, y_B, z_B)$$

dois pontos quaisquer.

Podemos escrever

$$\vec{AB} = (x_B - x_A)\vec{i} + (y_B - y_A)\vec{j} + (z_B - z_A)\vec{k}$$

Os três números $x_B - x_A$, $y_B - y_A$ e $z_B - z_A$ são as coordenadas do vector \vec{AB} relativamente à base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

2. A distância entre o ponto A e o ponto B é igual a

$$\sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$$

Este número representa a *norma* do vector \vec{AB} , indicada por $||\vec{AB}||$.

4 Produto escalar

1. Seja $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ um referencial ortonormado e sejam \vec{u} e \vec{v} dois vectores de coordenadas respectivas u_x, u_y, u_z , e v_x, v_y, v_z .

O produto escalar destes dois vectores é o número dado por

$$u_x v_x + u_y v_y + u_z v_z$$

Este número é indicado por $\vec{u} \cdot \vec{v}$.

2. Sejam \vec{u} e \vec{v} dois vectores não nulos. Sejam A, B e C três pontos tais que

$$\vec{AB} = \vec{u}$$

e

$$\vec{AC} = \vec{v}$$

Os vectores \vec{u} e \vec{v} são ortogonais se as rectas (A, B) e (A, C) forem perpendiculares.

Demonstra-se que dois vectores não nulos são ortogonais se e apenas se o seu produto escalar é nulo.

3. O produto escalar de dois vectores tem as seguintes propriedades:

$$\begin{aligned}\vec{u} \cdot \vec{v} &= \vec{v} \cdot \vec{u} \\ \vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) &= \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}\end{aligned}$$

5 Produto vectorial

1. Sejam \vec{u} e \vec{v} dois vectores quaisquer. Escolhamos três pontos A, B e C de modo que $\vec{AB} = \vec{u}$ e $\vec{AC} = \vec{v}$.

Podemos associar a \vec{u} e a \vec{v} um vector indicado por $\vec{u} \wedge \vec{v}$ e designado por produto vectorial de \vec{u} por \vec{v} .

Se um dos vectores é nulo, será $\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0}$.

Se os pontos A, B e C se encontram alinhados, os vectores \vec{u} e \vec{v} são ditos colineares, considerando-se então $\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0}$.

Se os vectores \vec{u} e \vec{v} não são nulos nem colineares, os pontos A, B e C determinam um plano (figura 6).

$\vec{u} \wedge \vec{v}$ é igual neste caso ao vector $\vec{W} = \vec{AD}$ definido pelas três propriedades seguintes:

- A recta (A, D) é perpendicular ao plano (A, B, C);
- Um observador colocado ao longo desta recta, com os pés em A e a cabeça em D, vê \vec{AC} à sua esquerda quando olha na direcção de \vec{AB} .
- A norma de \vec{AD} é $||\vec{AB}|| \cdot ||\vec{AC}|| \cdot \sin \alpha$.

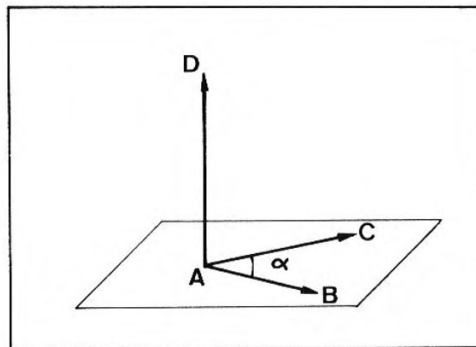


Fig. 6

2. Consideremos, relativamente a um referencial ortonormado $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$,

$$\begin{aligned}\vec{u} &= x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} \\ \vec{v} &= x'\vec{i} + y'\vec{j} + z'\vec{k}\end{aligned}$$

Demonstra-se que as coordenadas de $\vec{u} \wedge \vec{v}$ são, respectivamente

$$yz' - y'z, zx' - z'x \text{ e } xy' - x'y$$

3. O produto vectorial tem as seguintes propriedades:

$$\begin{aligned}\vec{u} \wedge \vec{v} &= -\vec{v} \wedge \vec{u} \\ \vec{u} \wedge (\vec{v} + \vec{w}) &= (\vec{u} \wedge \vec{v}) + (\vec{u} \wedge \vec{w})\end{aligned}$$

4. O produto vectorial é particularmente útil para demonstrar que os pontos se encontram alinhados ou que as rectas são paralelas. Servir-nos-á igualmente para resolver o problema da eliminação das partes escondidas no caso de poliedros convexos (ver o capítulo 8).

6 Mudança de referencial

Abordaremos dois aspectos desta questão:

1. Sendo o espaço organizado por um referencial ortonormado de sentido directo $(O_1, \vec{i}_1, \vec{j}_1, \vec{k}_1)$, como poderemos obter um novo referencial ortonormado $(O_1, \vec{i}_2, \vec{j}_2, \vec{k}_2)$ de sentido directo utilizando um dado vector \vec{u} ?

2. Sejam x_1, y_1, z_1 as coordenadas de um ponto P relativamente a um primeiro referencial ortonormado $(O_1, \vec{i}_1, \vec{j}_1, \vec{k}_1)$. Como se podem obter as coordenadas x_2, y_2 e z_2 de P relativamente a um segundo referencial ortonormado $(O_2, \vec{i}_2, \vec{j}_2, \vec{k}_2)$?

1. Obtenção de uma nova base

Seja \vec{u} um vector não nulo. Façamos $\vec{i}_2 = \frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|}$; o vector \vec{i}_2 é unitário.

Escolhamos agora um vector unitário \vec{j}_2 tal que $\vec{i}_2 \cdot \vec{j}_2 = 0$. Diremos que os vectores \vec{i}_2 e \vec{j}_2 são ortogonais.

O sistema $(\vec{i}_2, \vec{j}_2, \vec{k}_2 = \vec{i}_2 \wedge \vec{j}_2)$ responde à questão dado que \vec{k}_2 é unitário e ortogonal aos vectores \vec{i}_2 e \vec{j}_2 .

O referencial $(O_1, \vec{i}_2, \vec{j}_2, \vec{k}_2)$ é portanto ortonormado; além disso, tem um sentido directo.

EXEMPLO

Seja $\vec{u} = \vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k}$
 $\|\vec{u}\| = \sqrt{1^2 + 2^2 + 2^2} = 3$

Façamos
 $\vec{i}_2 = \frac{\vec{u}}{3}$

\vec{i}_2 será um vector unitário.

Seja $\vec{j}_2 = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$

As condições $\vec{i}_2 \cdot \vec{j}_2 = 0$ e \vec{j}_2 unitário traduzem-se pelo sistema

$$\frac{x}{3} + \frac{2y}{3} + \frac{2z}{3} = 0 \text{ e } x^2 + y^2 + z^2 = 1$$

Considerando $x=0$, resta verificar $y+z=0$ e $y^2+z^2=1$.
 De onde

$$y = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

e

$$z = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Teremos então:

$$\vec{k}_2 = \vec{i}_2 \wedge \vec{j}_2 = \left(\frac{\sqrt{2}}{6}, \frac{\sqrt{2}}{6}, -\frac{2\sqrt{2}}{3} \right)$$

2. Cálculo das novas coordenadas

Suponhamos conhecidas as coordenadas da nova base $(\vec{i}_2, \vec{j}_2, \vec{k}_2)$ relativamente à base antiga $(\vec{i}_1, \vec{j}_1, \vec{k}_1)$:

$$\begin{aligned} \vec{i}_2 &= \alpha_1 \vec{i}_1 + \beta_1 \vec{j}_1 + \gamma_1 \vec{k}_1 \\ \vec{j}_2 &= \alpha_2 \vec{i}_1 + \beta_2 \vec{j}_1 + \gamma_2 \vec{k}_1 \\ \vec{k}_2 &= \alpha_3 \vec{i}_1 + \beta_3 \vec{j}_1 + \gamma_3 \vec{k}_1 \end{aligned}$$

Demonstra-se que:

$$\begin{aligned} \vec{i}_1 &= \alpha_1 \vec{i}_2 + \alpha_2 \vec{j}_2 + \alpha_3 \vec{k}_2 \\ \vec{j}_1 &= \beta_1 \vec{i}_2 + \beta_2 \vec{j}_2 + \beta_3 \vec{k}_2 \\ \vec{k}_1 &= \gamma_1 \vec{i}_2 + \gamma_2 \vec{j}_2 + \gamma_3 \vec{k}_2 \end{aligned}$$

(o que se deve ao facto de as duas bases serem ortonormadas).
 Deduz-se daqui facilmente as novas coordenadas x_2, y_2 e z_2 de um ponto M a partir das suas antigas coordenadas x_1, y_1, z_1 .

$$\vec{O_2 M} = \vec{O_2 O_1} + \vec{O_1 M} = \vec{O_1 M} - \vec{O_1 O_2}$$

permite escrever:

$$z_2 \vec{i}_2 + y_2 \vec{j}_2 + z_2 \vec{k}_2 = (x_1 - x_0) \vec{i}_1 + (y_1 - y_0) \vec{j}_1 + (z_1 - z_0) \vec{k}_1, x_0, y_0, z_0$$

designando as coordenadas de O_2 no referencial $(O_1, \vec{i}_1, \vec{j}_1, \vec{k}_1)$.

Tira-se daqui:

$$x_2 = \alpha_1 (x_1 - x_0) + \beta_1 (y_1 - y_0) + \gamma_1 (z_1 - z_0)$$

$$y_2 = \alpha_2 (x_1 - x_0) + \beta_2 (y_1 - y_0) + \gamma_2 (z_1 - z_0)$$

$$z_2 = \alpha_3 (x_1 - x_0) + \beta_3 (y_1 - y_0) + \gamma_3 (z_1 - z_0)$$

TRANSFORMAÇÕES PONTUAIS

Seja M um ponto qualquer do espaço. Uma transformação pontual permitirá associar um ponto M' e um só a este ponto M .

M' poderá ser escolhido em todo o espaço ou, de maneira mais restritiva, num plano, numa recta, etc.

As transformações pontuais são indispensáveis para dar uma imagem plana de um objecto, para adaptar esta imagem às dimensões do visor, para descrever os deslocamentos do objecto a representar.

1 Definição analítica de uma transformação pontual

1. Pode-se definir uma transformação pontual de modo geométrico ou analítico.

Neste último caso, exprimem-se as coordenadas x' , y' , z' e M' em função das coordenadas x , y e z de M .

Utilizam-se então três funções f , g e h das variáveis x , y , z tais que

$$x' = f(x, y, z)$$

$$y' = g(x, y, z)$$

$$z' = h(x, y, z)$$

2. Em geral, as funções f , g e h são definidas para qualquer ponto $M(x, y, z)$ e pontos contínuos a este.

Por exemplo, as equações que se seguem definem uma transformação pontual afim:

$$x' = 3x + y + x + 1$$

$$y' = 2x - y + z - 2$$

$$z' = -x + 3y + 2z + 1$$

2 Visualização de um ponto no espaço

1. O espaço possui três dimensões, mas o visor ligado ao micro-computador utilizado apenas possui duas. Para ser observado, o ponto M do espaço deve ser representado por um ponto qualquer M' de um plano apropriado, o plano de projecção (figura 1).

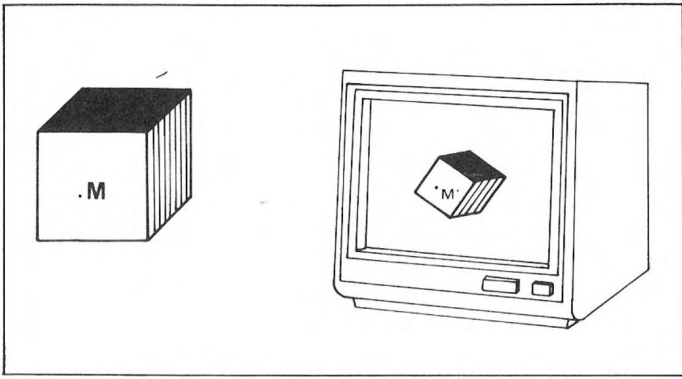


Fig. 1

Suponhamos que o espaço é organizado por um referencial ortornormado $Oxyz$ e que o plano de projecção depende do referencial $O'uv$.

Se x, y, z designam as coordenadas de M no referencial $Oxyz$ e se u e v designam as coordenadas de M' no referencial $O'uv$, existem duas funções f e g tais que $u = f(x, y, z)$ e $v = g(x, y, z)$.

Para que o relevo e a profundidade sejam correctamente traduzidos, é necessário escolher f e g de modo a respeitar certas limitações de natureza geométrica. Por exemplo, os pontos alinhados devem possuir imagens igualmente alinhadas.

2. As soluções possíveis são relativamente numerosas. Distinguem-se essencialmente:

- As projecções cilíndricas, com o caso particular da perspectiva cavaleira;
- As projecções cónicas.

Estes diferentes tipos de projecções serão estudados respectivamente nos Capítulos 5, 6 e 15.

3 Enquadramento da imagem

Qualquer que seja o método utilizado, perspectiva ou simples projecção, as dimensões da imagem devem ser modificadas para adaptação ao tamanho do terminal utilizado.

1. Princípio

A qualquer ponto $M = (x, y, z)$ do objecto corresponde um ponto $m = (u, v)$ da imagem.

Designemos por u_{\min} e u_{\max} os valores mínimo e máximo de u , e por v_{\min} e v_{\max} os valores mínimo e máximo de v .

A imagem do objecto encontra-se portanto inscrita num rectângulo $ABCD$ do visor (figura 2), de largura $u_{\max} - u_{\min}$ e de altura $v_{\max} - v_{\min}$.

Associemos agora a m o ponto $m' = (u', v')$ do visor (figura 2). No caso do ZX Spectrum, deveremos ter $0 \leq u' \leq 255$ e $0 \leq v' \leq 175$ (figura 3).

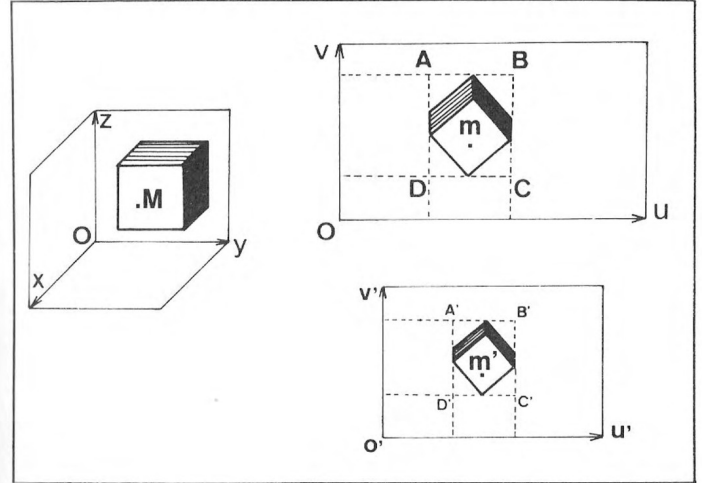


Fig. 2

Consideremos $u' = \varphi(u, v)$ e $v' = \psi(u, v)$. As duas funções φ e ψ devem ser escolhidas de tal modo que o rectângulo $ABCD$ seja transformado num rectângulo $A'B'C'D'$ inscrito no visor.

Nas duas soluções propostas, escolheremos para φ e ψ funções afins e consideraremos $u' = k_1 u + l_1$, $v' = k_2 v + l_2$, onde k_1, k_2, l_1 e l_2 designam quatro números a determinar.

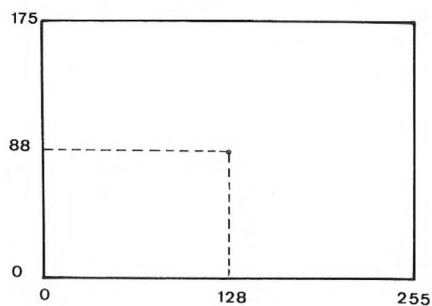


Fig. 3

2. Primeira solução

Para evitar eventuais erros de arredondamento, usaremos u' e v' de modo a obter $1 \leq u' \leq 254$ e $1 \leq v' \leq 174$.

Para não alterarmos as proporções da imagem, escolheremos k_1 , k_2 , l_1 e l_2 de modo a que aquela ocupe a maior parte do visor. Consideremos portanto:

$$\begin{aligned} 1 &= k_1 u_{\min} + l_1 \\ 254 &= k_1 u_{\max} + l_2 \\ 1 &= k_2 v_{\min} + l_2 \\ 174 &= k_2 v_{\max} + l_2 \end{aligned}$$

Teremos de resolver dois sistemas do primeiro grau, cada um com duas incógnitas.

Após resolução, obtemos:

$$k_1 = \frac{253}{u_{\max} - u_{\min}}$$
$$I_1 = 254 - k_1 \times u_{\max}$$

e

$$k_2 = \frac{173}{v_{\max} - v_{\min}}$$
$$I_2 = 174 - k_2 \times v_{\max}$$

Consideremos então um programa no qual a imagem do objecto a representar englobe n pontos de coordenadas u_1, u_2, \dots, u_n e v_1, v_2, \dots, v_n .

O enquadramento desta imagem far-se-á nas linhas 8100 a 8170 do programa que se segue:

```
001000 DDM      i=i  
001001 LMT      k1=0000/(umax-umin)  
001002 LMT      l1=0094-k1*umax%  
001003 LMT      k0=173/(vmax-vmin)  
001004 LMT      l0=174-k0*vmax%  
001005 WOP      i=1  
001006 LMT      U(i)=k1*u(i)+l1  
001007 LMT      v(i)=k0*v(i)+l0  
001008 NEXXT    i  
001009 *****
```

Note-se que as letras U e V servem para designar as variáveis u e v e as variáveis u' e v'.

3. Segunda solução

O retângulo A'B'C'D', de altura h_a e largura l_a , deve, desta vez, verificar as duas condições seguintes:

- As suas proporções são as mesmas que as do rectângulo ABCD;
- O seu centro coincide com o centro do visor, de coordenadas 128 e 88.

Consideremos $k_a = \frac{h_a}{l_a}$.

A primeira condição traduz-se por:

$$k_a = \frac{V_{\max} - V_{\min}}{U_{\max} - U_{\min}}$$

A segunda condição será traduzida por:

$$128 = k_1 \left(\frac{u_{\max} + u_{\min}}{2} \right) + I_1$$

$$128 + \frac{I_a}{2} = k_1 u_{\max} + I_1$$

$$88 = k_2 \left(\frac{v_{\max} + v_{\min}}{2} \right) + l_2$$

$$88 + \frac{h_a}{2} = k_2 v_{\max} + l_2$$

Tira-se daqui:

$$k_1 = \frac{l_a}{u_{\max} - u_{\min}}$$

$$k_2 = \frac{h_a}{v_{\max} - v_{\min}}$$

$$l_1 = 128 + \frac{l_a}{2} - l_1 \times u_{\max}$$

$$l_2 = 88 + \frac{h_a}{2} - l_2 \times v_{\max}$$

Resta escolher l_a e h_a em função da relação $\frac{\text{altura do visor}}{\text{largura do visor}}$.

Este número será igual a $\frac{176}{256}$, ou seja, 0,6875.

Consideraremos 0,6 como valor suficientemente aproximado de $\frac{176}{256}$.

Deverão ser considerados dois casos:

1. Se $k_a > 0,6$, escolheremos $h_a = 150$.

Teremos então $\frac{150}{l_a} > 0,6$, donde $l_a < 250$.

2. Se $k_a \leq 0,6$ escolheremos $l_a = 250$.

Teremos então $\frac{h_a}{250} \leq 0,6$, donde $h_a \leq 150$.

Em todos os casos, a imagem obtida no visor estará contida num rectângulo tendo como dimensões 150×250 .

Consideremos novamente uma imagem contendo n pontos de coordenadas respectivamente u_1, u_2, \dots, u_n e v_1, v_2, \dots, v_n .

A adaptação desta imagem às dimensões do visor será feita graças ao programa seguinte, numerado arbitrariamente entre 8100 e 8230.

```

8000 REM ***
8100 LET ka=(vmax-vmin)/(umax-umin)
8110 IF ka>0.6 THEN LET ha=150
8120 IF ka>0.6 THEN LET la=150/ka
8130 IF ka<=0.6 THEN LET la=250
8140 IF ka<=0.6 THEN LET ha=250*ka
8150 LET k1=la/(umax-umin)
8160 LET l1=128+la/2-k1*umax
8170 LET k2=ha/(vmax-vmin)
8180 LET l2=88+ha/2-k2*vmax
8190 FOR i=1 TO n
8200 LET u(i)=k1*u(i)+l1
8210 LET v(i)=k2*v(i)+l2
8220 NEXT i
8230 REM ***

```

4 Deslocamentos do objecto a representar

O objecto a representar ocupa uma certa posição relativamente a um referencial ortonormado Oxyz, sendo portanto desejável poder deslocá-lo de modo a ser representado noutra posição.

Os deslocamentos podem consistir em translações, rotações ou mistos, compostos de translações e rotações.

Consideremos duas posições sucessivas $M_1 = (x_1, y_1, z_1)$ e $M_2 = (x_2, y_2, z_2)$ de um mesmo ponto do objecto. Em todos os casos, existirão três funções f, g e h tais que

$$\begin{aligned} x_2 &= f(x_1, y_1, z_1) \\ y_2 &= g(x_1, y_1, z_1) \\ z_2 &= h(x_1, y_1, z_1) \end{aligned}$$

1. As translações

Seja \vec{v} um vector qualquer de coordenadas v_x, v_y e v_z . Consideremos $\vec{M}_1, \vec{M}_2 = \vec{v}$.

Obteremos as equações seguintes:

$$\begin{aligned} x_2 &= x_1 + v_x \\ y_2 &= y_1 + v_y \\ z_2 &= z_1 + v_z \end{aligned}$$

2. As rotações

Apresentaremos aqui as fórmulas de cálculo que respeitam a uma rotação de ângulo θ em torno de cada um dos eixos do referencial Oxyz.

a) Rotação em torno do eixo Ox:

$$\begin{aligned}x_2 &= x_1 \\x_2 &= y_1 \cos \theta - z_1 \sin \theta \\z_2 &= y_1 \sin \theta + z_1 \cos \theta\end{aligned}$$

b) Rotação em torno a Oy:

$$\begin{aligned}x_2 &= x_1 \cos \theta - z_1 \sin \theta \\y_2 &= y_1 \\z_2 &= x_1 \sin \theta + z_1 \cos \theta\end{aligned}$$

c) Rotação em torno a Oz:

$$\begin{aligned}x_2 &= x_1 \cos \theta - y_1 \sin \theta \\y_2 &= x_1 \sin \theta + y_1 \cos \theta \\z_2 &= z_1\end{aligned}$$

Como se pode constatar, uma das coordenadas não se altera em todos os casos.

As linhas de programa que se seguem permitem calcular as novas coordenadas de um ponto em função das antigas, numa rotação de ângulo θ em torno do eixo Oz. O facto de conservar as mesmas variáveis x , y e z para as coordenadas, antigas ou novas, obriga-nos a recorrer a duas variáveis auxiliares u e v .

```
090 REM ***
1000 LET U=X*COS T-Y*SEN T
1010 LET V=X*SEN T+Y*COS T
1020 LET X=U
1030 LET Y=V
1040 REM ***
```

3. Deslocamentos mistos

O objecto sofre sucessivamente uma rotação e uma translação, ou uma translação e uma rotação.

Será necessário dar atenção à ordem dos deslocamentos, dado que o resultado final depende dessa ordem.

4. Deslocamentos diversos

Desloquemos um objecto da posição 1 para a posição 2. O deslocamento inverso conduz de novo o objecto para a posição 1 a partir da posição 2.

Assinalemos que o inverso de uma translação de vector \vec{v} será a translação de vector $-\vec{v}$, que o inverso de uma rotação de eixo Δ e de ângulo θ é uma rotação de eixo Δ e de ângulo igual a $-\theta$.

RECTAS E PLANOS NO ESPAÇO

Neste capítulo, indicaremos as representações analíticas mais habituais das rectas e planos do espaço, sendo este referido a um referencial ortonormado directo Oxyz.

1 Rectas

1. Recta definida por dois pontos

Sejam $A = (x_A, y_A, z_A)$ e $B = (x_B, y_B, z_B)$ dois pontos distintos e seja Δ a recta determinada por estes pontos (figura 1).

Se $P = (x, y, z)$ for um ponto qualquer de Δ , existe um número real único tal que $\vec{AP} = k \vec{AB}$.

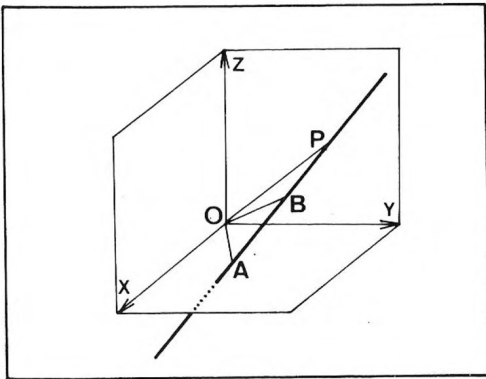


Fig. 1

Como $\vec{AP} = \vec{OP} - \vec{OA}$, obtemos

$$k \vec{AB} = \vec{OP} - \vec{OA}$$

donde

$$\vec{OP} = (1 - k) \vec{OA} + k \vec{OB}$$

Para a projecção em cada eixo, obtemos:

$$\begin{aligned} x &= (1 - k) x_A + k x_B \\ y &= (1 - k) y_A + k y_B \\ z &= (1 - k) z_A + k z_B \end{aligned}$$

Estas três equações constituem, para k variando entre $-\infty$ e $+\infty$, uma representação paramétrica da recta Δ .

2. Segmento de recta

Se se fizer variar o parâmetro k apenas entre zero e um, obtaremos uma representação paramétrica do segmento $[A, B]$.

3. Vector director de uma recta

Retomemos as mesmas notações do parágrafo 1.1. O vector \vec{AB} é designado vector director da recta Δ ; tem como coordenadas os números

$$\begin{aligned} v_x &= x_B - x_A \\ v_y &= y_B - y_A \\ v_z &= z_B - z_A \end{aligned}$$

4. Recta definida por um ponto e um vector director

Seja $A = (x_A, y_A, z_A)$ um ponto qualquer e \vec{v} um vector não nulo de coordenadas v_x, v_y, v_z .

Definamos um ponto B de coordenadas x_B, y_B e z_B , fazendo:

$$\begin{aligned} x_B &= x_A + v_x \\ y_B &= y_A + v_y \\ z_B &= z_A + v_z \end{aligned}$$

Dado que o ponto B é distinto do ponto A, estes dois pontos determinam uma recta Δ .

As equações do parágrafo 1.1 transformam-se em:

$$\begin{aligned}x &= x_A + k v_x \\ y &= y_A + k v_y \\ z &= z_A + k v_z\end{aligned}$$

Estas equações caracterizam a recta Δ definida pelo ponto A e o vector \vec{v} .

5. Rectas paralelas e rectas ortogonais

Sejam Δ e Δ' duas rectas de vectores directores respectivos \vec{u} e \vec{v} . Designemos por u_x, u_y e u_z as coordenadas de \vec{u} , e por v_x, v_y e v_z as de \vec{v} .

1. Δ e Δ' são ortogonais se e apenas se o produto escalar $\vec{u} \cdot \vec{v}$ for nulo.

Isto equivale a

$$u_x v_x + u_y v_y + u_z v_z = 0$$

2. Δ e Δ' são paralelas se e apenas se o produto vectorial $\vec{u} \wedge \vec{v}$ for nulo.

Isto equivale a

$$\begin{aligned}u_x v_y - u_y v_x &= 0 \\ u_y v_z - u_z v_y &= 0 \\ u_z v_x - u_x v_z &= 0\end{aligned}$$

Se os números v_x, v_y e v_z não são nulos, a condição anterior pode ser escrita de forma mais simples:

$$\frac{u_x}{v_x} = \frac{u_y}{v_y} = \frac{u_z}{v_z}$$

2 Planos

1. Equação cartesiana de um plano

Seja $M = (x, y, z)$ um ponto qualquer de um plano P.

Demonstra-se que as coordenadas do ponto P satisfazem uma relação do tipo $ax + by + cz + d = 0$.

Esta relação constitui a equação cartesiana do plano P.

Os números a, b, c e d podem ser interpretados facilmente.

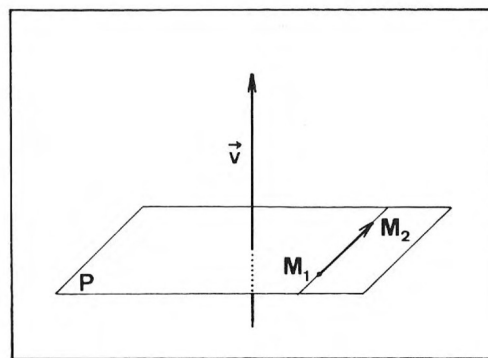


Fig. 2

1. Consideremos $\vec{v} = (a, b, c)$. O vector assim definido é perpendicular ao plano P (qualquer recta de vector director \vec{v} é perpendicular ao plano P).

De facto, sejam M_1 e M_2 dois pontos distintos do plano P (figura 2).

O vector $\vec{M_1 M_2}$ tem por coordenadas $z_2 - z_1, y_2 - y_1$ e $x_2 - x_1$.

Calculemos o produto escalar $\vec{v} \cdot \vec{M_1 M_2}$.

Obteremos

$$a(x_2 - x_1) + b(y_2 - y_1) + c(z_2 - z_1)$$

isto é,

$$ax_2 + by_2 + cz_2 - (ax_1 + by_1 + cz_1)$$

donde

$$(-d) - (-d)$$

ou seja, zero.

2. No que se refere ao número d, podemos notar que o plano de equação $ax + by + cz + d = 0$ é paralelo ao plano de equação $ax + by + cz = 0$, plano que contém a origem do referencial.

2. Planos especiais

Qualquer equação do tipo $ax + by + cz = 0$ define, como se acaba de referir, um plano contendo a origem do sistema de coordenadas. Para definir o plano xOy , é necessário fazer $a=b=0$ e $c=1$. Para definir o plano xOz , é necessário fazer $a=c=0$ e $b=1$. Com $a=1$ e $b=c=0$ define-se do mesmo modo o plano zOy .

3. Plano definido por duas rectas concorrentes

Sejam d e d' duas rectas distintas, intersectando-se em A . Sejam \vec{u} e \vec{v} os vectores directores respectivos destas rectas. Consideremos $\vec{u} = (u_x, u_y, u_z)$ e $\vec{v} = (v_x, v_y, v_z)$. Para qualquer ponto $M = (x, y, z)$ do plano P definido por d e d' , existem dois números reais k_1 e k_2 tais que

$$\vec{AM} = k_1 \vec{u} + k_2 \vec{v}$$

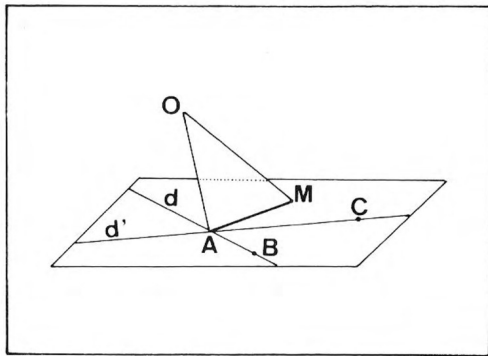


Fig. 3

Teremos $\vec{OM} = \vec{OA} + \vec{AM}$, de onde decorrem as equações seguintes:

$$\begin{aligned} x &= x_A + k_1 u_x + k_2 v_x \\ y &= y_A + k_1 u_y + k_2 v_y \\ z &= z_A + k_1 u_z + k_2 v_z \end{aligned}$$

Estas três equações constituem uma representação paramétrica do plano P .

Seja B o ponto da recta d tal que $\vec{AB} = \vec{u}$, e seja C o ponto da recta d' tal que $\vec{AC} = \vec{v}$ (figura 3).

As equações anteriores transformam-se em:

$$\begin{aligned} x &= x_A + k_1 (x_B - x_A) + k_2 (x_C - x_A) \\ y &= y_A + k_1 (y_B - y_A) + k_2 (y_C - y_A) \\ z &= z_A + k_1 (z_B - z_A) + k_2 (z_C - z_A) \end{aligned}$$

4. Plano definido por três pontos

Sejam A, B e C três pontos diferentes e não alinhados. Estes três pontos determinam um plano único cuja equação tem a forma

$$ax + by + cz + d = 0$$

Eliminando k_1 e k_2 nas equações do parágrafo precedente, obtemos as expressões de a, b, c e d em função das coordenadas dos pontos A, B e C .

Este cálculo é realizado no programa seguinte:

```

10 DIM X(3)
20 DIM U(3)
30 DIM V(3)
40 FOR I=1 TO 3
50 PRINT AT 0,0;"COORDENADAS D
0 PONTO No ";I;":
60 INPUT "ABSCISSA? ";X(I)
70 INPUT "ORDENADA? ";U(I)
80 INPUT "ALTITUDE? ";V(I)
90 NEXT I
100 LET K1=X(0)-X(1)
110 LET K2=U(0)-U(1)
120 LET K3=V(0)-V(1)
130 LET K4=X(0)-X(2)
140 LET K5=U(0)-U(2)
150 LET K6=V(0)-V(2)
160 LET K7=X(1)-X(2)
170 LET K8=U(1)-U(2)
180 LET K9=V(1)-V(2)
190 LET C=K4*K5-K3*K6
200 LET B=K3*K7-K9*K1
210 LET A=K8*K2-K5*K1
220 PRINT "PONTOS ALINHADOS" IF C=0 THEN
230 GOTO 250
240 PRINT "A EQUACAO DESEJADA E"
250 PRINT "AX+BY+CZ+D=0 COM:"
260 PRINT AT 0,0;"A = ";A
270 PRINT "B = ";B
280 PRINT "C = ";C
290 PRINT "D = ";-(B*X(1)+C*U(1)+C*V(1)+A)

```

1. $A=(1, 1, 1)$, $B=(2, 0, -1)$, $C=(0, 2, -1)$.

Obtemos $a=4$, $b=4$, $c=0$ e $d=-8$.

2. $A=(1, 1, 1)$, $B=(2, 3, 4)$, $C=(0, -2, -5)$.

Obtemos $a=-3$, $b=3$, $c=-1$ e $d=1$.

5. Planos paralelos e planos perpendiculares

Sejam P_1 e P_2 dois planos de equações respectivas:

$$a_1 x + b_1 y + c_1 z + d_1 = 0$$

e

$$a_2 x + b_2 y + c_2 z + d_2 = 0$$

Consideremos $\vec{v}_1 = (a_1, b_1, c_1)$ e $\vec{v}_2 = (a_2, b_2, c_2)$.

1. Os planos P_1 e P_2 são paralelos se e apenas se os vectores \vec{v}_1 e \vec{v}_2 o são.

Deve-se portanto ter $\vec{v}_1 \wedge \vec{v}_2 = 0$, o que conduz a

$$a_1 b_2 - a_2 b_1 = b_1 c_2 - b_2 c_1 = c_1 a_2 - c_2 a_1 = 0$$

Se a_2 , b_2 e c_2 não forem nulos, poderemos traduzir esta condição por:

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$$

2. Os planos P_1 e P_2 são perpendiculares se e apenas se os vectores \vec{v}_1 e \vec{v}_2 forem ortogonais, e portanto tiverem um produto escalar nulo.

Este facto traduz-se por:

$$a_1 a_2 + b_1 b_2 + c_1 c_2 = 0$$

3 Intersecções

1. Intersecção de um plano e uma recta

Seja P um plano de equação $ax + by + cz + d = 0$ e seja d uma recta definida por um vector director $\vec{v} = (v_x, v_y, v_z)$ e um ponto $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ — (figura 4).

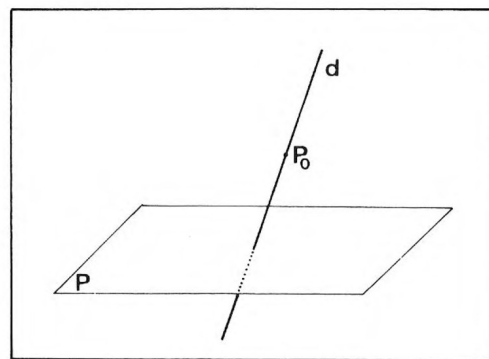


Fig. 4

Se existe um ponto de intersecção de d com P , as suas coordenadas satisfazem o sistema:

$$ax + by + cz + d = 0$$

$$x = x_0 + k v_x$$

$$y = y_0 + k v_y$$

$$z = z_0 + k v_z$$

Note-se que nestas equações k é um parâmetro desconhecido. O programa que se segue permite obter a solução deste sistema quando ela existe.

```

10 PRINT "O PLANO TEM POR EQUA
Cao " "AX+BY+CZ+D=0"
20 INPUT "INDIQUE A"/a
30 INPUT "INDIQUE B"/b
40 INPUT "INDIQUE C"/c
50 INPUT "INDIQUE D"/d
60 CLS
70 PRINT "A RECTA PASSA PELO P
ONTO P0 DE COORDENADAS X0, Y0,
Z0,"
80 INPUT "INDIQUE X0"/x0
90 INPUT "INDIQUE Y0"/y0
100 INPUT "INDIQUE Z0"/z0
110 CLS
120 PRINT "SEJAM VX, VY, VZ AS
COORDENADAS DE UM VECTOR DIRECTO
R DESTA RECTA"
130 INPUT "INDIQUE VX"/vx

```

```

140 INPUT "INDIQUE VY",VY
150 INPUT "INDIQUE VZ",VZ
160 CLS
170 LET S=B*VX+V*VY+C*VZ+d
180 LET R=B*VX+V*VY+C*VZ
190 IF R=0 AND S=0 THEN PRINT "
A RECTA ESTA CONTIDA NO PLANO":
GO TO 1000
200 IF R=0 AND S<>0 THEN PRINT
"RECTA=" PARALELA AO PLANO":
GO TO 1000
210 LET K=-S/R
220 PRINT "COORDENADAS DO PONTO
DE INTERSECCAO:"
230 PRINT "X = ";K*VX+X0
240 PRINT "Y = ";K*VY+Y0
250 PRINT "Z = ";K*VZ+Z0

```

EXEMPLO

P tem a equação $x+y+z+1=0$.

d tem por vector director $(1, 1, 1)$ e passa pelo ponto $(0, 0, 0)$.

Obtém-se $x=y=z=-\frac{1}{3}$.

2. Intersecção de dois planos

Sejam P_1 e P_2 dois planos de equações

$$a_1 x + b_1 y + c_1 z + d_1 = 0$$

e

$$a_2 x + b_2 y + c_2 z + d_2 = 0$$

Podem ocorrer três casos:

- P_1 e P_2 são coincidentes;
- P_1 e P_2 são distintos e paralelos;
- P_1 e P_2 são distintos e intersectam-se segundo uma recta d.

Neste último caso (figura 5), é necessário procurar um vector director $\vec{v} = (v_x, v_y, v_z)$ de d e um ponto particular $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ de d.

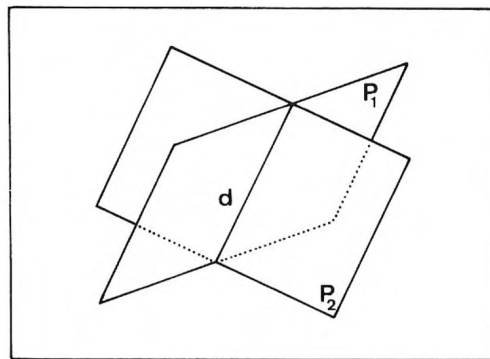


Fig. 5

É isto que faz o programa seguinte.

```

10 PRINT "INTERSECCAO DOS PLAN
OS TENDO POR VECTORES RESPECTIVOS
E"
20 INPUT "INDIQUE a1",a1
30 INPUT "INDIQUE b1",b1
40 INPUT "INDIQUE c1",c1
50 INPUT "INDIQUE d1",d1
60 INPUT "INDIQUE a2",a2
70 INPUT "INDIQUE b2",b2
80 INPUT "INDIQUE c2",c2
90 INPUT "INDIQUE d2",d2
100 LET R1=a1*a2+b1*b2+c1*c2
110 LET R2=a1*d2+b1*d2+c1*d2
120 LET R3=a2*d1+b2*d1+c2*d1
130 LET R4=a1*d1+b1*d1+c1*d1
140 LET R5=a2*d2+b2*d2+c2*d2
150 LET R6=a1*d2+b1*d2+c1*d2
160 LET R7=a2*d1+b2*d1+c2*d1
170 LET R8=a1*d1+b1*d1+c1*d1
180 LET R9=a2*d2+b2*d2+c2*d2
190 IF R1=0 THEN
200 IF R2=0 THEN
210 IF R3=0 THEN
220 IF R4=0 THEN
230 IF R5=0 THEN
240 IF R6=0 THEN
250 IF R7=0 THEN
260 IF R8=0 THEN
270 IF R9=0 THEN
280 PRINT "OS PLANOS SAO COINCIDENTES"
290 GOTO 300
300 IF R1=0 THEN
310 IF R2<>0 THEN
320 IF R3<>0 THEN
330 IF R4<>0 THEN
340 IF R5<>0 THEN
350 IF R6<>0 THEN
360 IF R7<>0 THEN
370 IF R8<>0 THEN
380 IF R9<>0 THEN
390 PRINT "OS PLANOS SAO PARALELOS"
400 GOTO 300
410 IF R1<>0 THEN
420 IF R2<>0 THEN
430 IF R3<>0 THEN
440 IF R4<>0 THEN
450 IF R5<>0 THEN
460 IF R6<>0 THEN
470 IF R7<>0 THEN
480 IF R8<>0 THEN
490 IF R9<>0 THEN
500 PRINT "OS PLANOS SE INTERSECTAM EM UMA RECTA"
510 GOTO 520
520 LET V1=b1*c2-b2*c1
530 LET V2=c1*a2-c2*a1
540 LET V3=a1*b2-a2*b1
550 LET V=V1*V2+V2*V3+V3*V1
560 LET V1=V1/V
570 LET V2=V2/V
580 LET V3=V3/V
590 LET X0=-d1/V1
600 LET Y0=-d2/V2
610 LET Z0=-d3/V3
620 PRINT "VECTOR DIRECTOR DE D:"
630 PRINT "VX=";V1
640 PRINT "VY=";V2
650 PRINT "VZ=";V3
660 PRINT "PUNTO PARTICULAR DE D:"
670 PRINT "X0=";X0
680 PRINT "Y0=";Y0
690 PRINT "Z0=";Z0
700 GOTO 300

```

```

260 GO TO 1000
400 REM CASO DE K1<>0
410 LET X0=K4/K1
420 LET U0=K5/K1
430 LET Z0=0
440 RETURN
500 REM CASO DE K1=0, K2<>0
510 LET X0=K6/K2
520 LET U0=0
530 LET Z0=K5/K2
540 RETURN
600 REM CASO DE K1=0, K2=0,
    K3<>0
610 LET X0=0
620 LET U0=K6/K3
630 LET Z0=-K4/K3
640 RETURN
700 REM RESULTADOS
710 CLS
720 PRINT AT 0,0;"A INTERSECÇÃO
    DOS PLANOS É UMA RECTA DE
    VECTOR DIRECTOR "
730 PRINT AT 4,0;"UX = ";K3
740 PRINT "UY = ";K2
750 PRINT "UZ = ";K1
760 PRINT AT 12,0;"ESTA RECTA P
    ASSA PELO PONTO DE COORDENADAS"
770 PRINT AT 14,0;"X = ";X0
780 PRINT "Y = ";U0
790 PRINT "Z = ";Z0
800 RETURN
1000 STOP

```

Para representar um objecto, utilizam-se habitualmente dois tipos de projecções: as projecções paralelas ou cilíndricas e as projecções centrais ou cónicas.

Neste capítulo, serão estudadas apenas as primeiras (as projecções cónicas serão objecto do capítulo 15).

1 Definições

1. Seja P um plano e d uma recta não paralela a P . A qualquer ponto M do espaço poderemos associar um ponto M' do seguinte modo: M' é o ponto de intersecção do plano P com a recta d' , que passa por M e é paralela a d (ver a figura 1).

M' é designado *projecção* do ponto M no plano P paralelamente à recta d .

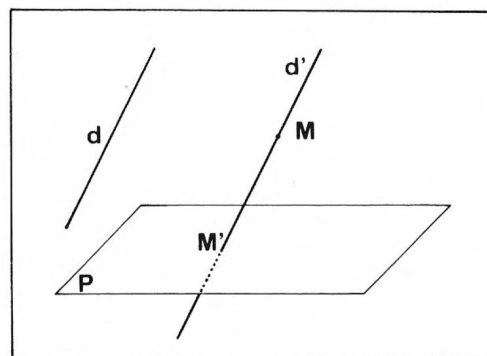


Fig. 1

2. Se d é perpendicular a P (figura 2), M' é a projecção ortogonal de M no plano P .

3. A transformação pontual que permite associar M' a M é uma projecção cilíndrica.

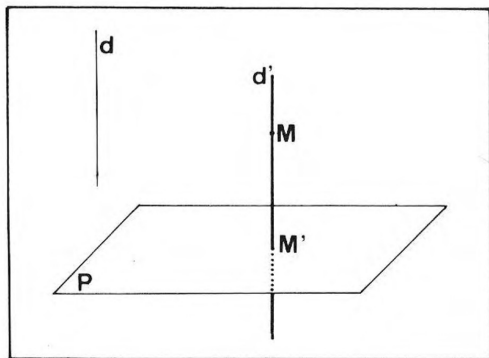


Fig. 2

2 Propriedades das projecções cilíndricas

Recordaremos aqui algumas das propriedades das projecções cilíndricas.

P designará o plano de projecção e d a recta segundo a qual se faz a projecção (d não é portanto paralela ao plano P).

1. Sejam A , B e C três pontos distintos e sejam A' , B' e C' as suas projecções no plano P paralelamente à recta d .

Se A , B e C se encontram alinhados e se a recta que contém estes pontos não é paralela a d , A' , B' e C' encontram-se igualmente alinhados (figura 3).

Se B se encontra entre A e C , B' encontra-se igualmente entre A' e C' .

Resulta daqui que a imagem de uma recta é uma recta (poderá ser excepcionalmente um ponto); a imagem de um segmento de recta é um segmento de recta (ou um ponto).

2. Sejam d' e d'' duas rectas paralelas, mas não paralelas a d . As suas projecções no plano P são rectas paralelas ou coincidentes (figura 4).

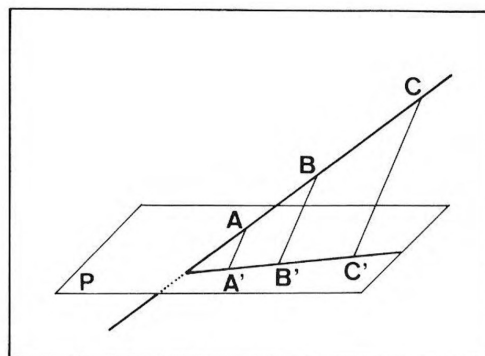


Fig. 3

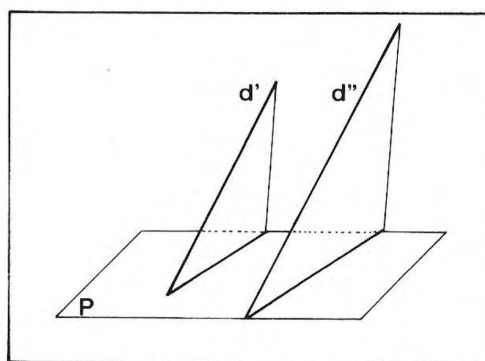


Fig. 4

3. Seja $ABCDE \dots$ um polígono plano convexo. A projecção $A'B'C'D'E' \dots$ deste polígono é igualmente um polígono convexo (figura 5).

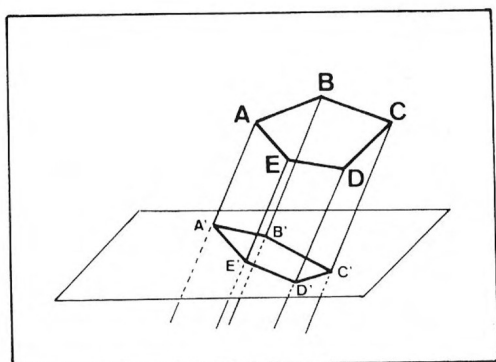


Fig. 5

4. Seja AB um segmento de recta. As projecções deste segmento em dois planos paralelos, paralelamente a uma recta d , são segmentos com o mesmo comprimento (figura 6).

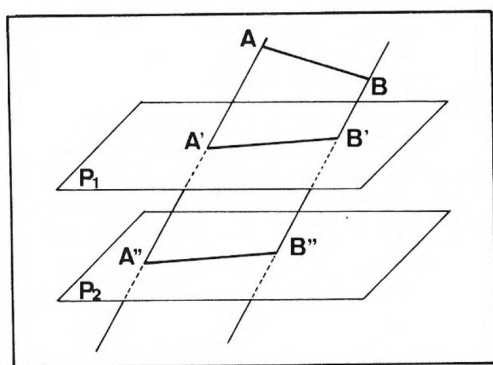


Fig. 6

3 Coordenadas da projecção de um ponto

Seja P um plano de equação $ax + by + cz + d = 0$ e seja Δ uma recta de vector director $\vec{v} = (v_x, v_y, v_z)$.

Consideraremos que Δ não é paralela a P .

Esta condição traduz-se pela relação:

$$a v_x + b v_y + c v_z \neq 0$$

Seja $M = (x_M, y_M, z_M)$ um ponto qualquer do espaço e seja $M' = (x', y', z')$ a sua projecção no plano P paralelamente a Δ . Propomo-nos calcular x' , y' e z' .

1. Caso geral

De acordo com o resultado do capítulo 4, parágrafo 1.4, existe um número k tal que:

$$\begin{aligned} x' &= x_M + k v_x \\ y' &= y_M + k v_y \end{aligned}$$

e

$$z' = z_M + k v_z$$

Dado que M' pertence ao plano P , poderemos escrever

$$ax' + by' + cz' + d = 0$$

resulta daqui que:

$$(a v_x + b v_y + c v_z) k + a x_M + b y_M + c z_M + d = 0$$

donde

$$k = -\frac{a x_M + b y_M + c z_M + d}{a v_x + b v_y + c v_z}$$

2. Caso de uma projecção ortogonal

Neste caso, Δ é perpendicular ao plano P . Podemos portanto escolher o vector (a, b, c) como vector director de Δ .

As fórmulas do parágrafo anterior transformam-se em:

$$\begin{aligned} x' &= x_M + k a \\ y' &= y_M + k b \\ z' &= z_M + k c \end{aligned}$$

$$\text{com } k = -\frac{ax_M + by_M + cz_M}{a^2 + b^2 + c^2}$$

Decorre daqui o programa seguinte:

```

10 PRINT "O PONTO M TEM AS COO
RDENADAS X, Y E Z."
20 INPUT "X = "; X
30 INPUT "Y = "; Y
40 INPUT "Z = "; Z
50 CLS
60 PRINT "O PLANO P TEM A EQUA
CÃO PX+BY+CZ+D=0"
70 INPUT "P = "; P
80 INPUT "B = "; B
90 INPUT "C = "; C
100 INPUT "D = "; D
110 LET H=B*X+B*Y+C*Z+D
120 LET R=B*B+C*C
130 IF R=0 THEN GO TO 50
140 LET K=-H/R
150 REM RESULTADOS
160 CLS
170 PRINT "COORDENADAS DA PROJE
CÃO ORTOGO-NAL DE M SOBRE P:"
180 PRINT AT 5,0;"X = ";X+K*B
190 PRINT AT 6,0;"Y = ";Y+K*B
200 PRINT AT 7,0;"Z = ";Z+K*C
210 PRINT AT 14,0;"DISTÂNCIA DE
M AO PLANO P"
220 PRINT AT 15,0;"D(M,P) = ";A
B H/SQR R

```

3. Distância de um ponto a um plano

Como a distância d do ponto M ao plano P é igual ao comprimento do segmento [M, M'], obtém-se:

$$d = \frac{|ax_M + by_M + cz_M|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

4 Perspectiva ortográfica

1. Para representar um objecto utilizam-se geralmente *vistas*: vista de frente, lateral, etc.

Cada uma destas vistas é uma projecção ortogonal num plano paralelo a um dos três planos xOy, xOz, zOy do sistema Oxyz (figura 7).

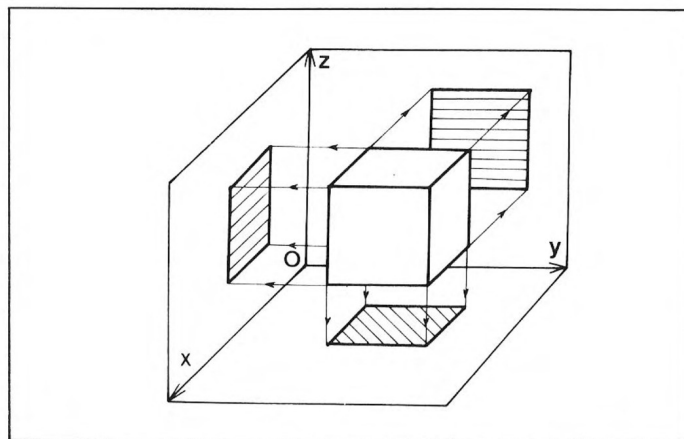


Fig. 7

2. Escolhamos como plano de projecção o plano xOy: a representação obtida é chamada *perspectiva ortográfica*.

Se $M' = (x', y', z')$ é a projecção de $M = (x, y, z)$ no plano xOy, vemos que $x' = x$, $y' = y$ e $z' = 0$.

De um modo geral, obtemos uma projecção ortográfica do ponto $M = (x, y, z)$ conservando duas coordenadas e igualando a terceira a zero.

3. A título de exemplo, representemos uma pirâmide de base quadrada SABCD em projecção ortográfica. Consideraremos $A = (30, -30, 0)$, $B = (30, 30, 0)$, $C = (-30, 30, 0)$, $D = (-30, -30, 0)$ e $S = (0, 0, 90)$.

O programa é o seguinte:

```

10 DATA 30,-30,0,30,30,0,-30,3
0,0,-30,-30,0,0,0,90
20 DIM X(5)
30 DIM Y(5)
40 DIM Z(5)
50 FOR I=1 TO 5
60 READ X(I),Y(I),Z(I)
70 NEXT I
80 DATA 1,2,2,3,3,4,4,1,5,1,5,
2,5,3,5,4

```

```

90 PRINT "USE 1, 2 OU 3 CONFOR
ME DESSEJA A PROJECCAO EM XOY, XO
Z OU YOZ"
100 INPUT n
110 CLS
1200 IF n=1 THEN GO SUB 200
1300 IF n=2 THEN GO SUB 300
1400 IF n=3 THEN GO SUB 400
1500 GO TO 8000
200 FOR i=1 TO 6
300 READ a,b
400 PLOT 100+X(a),80+Y(a)
500 DRAW X(a)-X(b),Y(a)-Y(b)
600 NEXT i
700 RETURN
300 FOR i=1 TO 6
400 READ a,b
500 PLOT 100+X(a),Z(a)
600 DRAW X(a)-X(b),Z(a)-Z(b)
700 NEXT i
800 RETURN
400 FOR i=1 TO 6
500 READ a,b
600 PLOT 100+X(a),Z(a)
700 DRAW X(a)-X(b),Z(a)-Z(b)
800 NEXT i
900 RETURN

```

As figuras 8 e 9 mostram-nos duas vistas desta pirâmide.

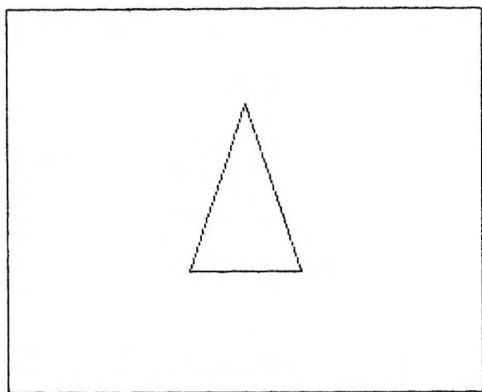


Fig. 8. — Projecção no plano ZOY.

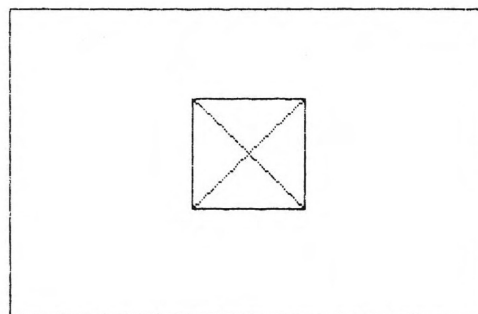


Fig. 9. — Projecção no plano XOY.

5 Perspectiva oblíqua

Seja P um plano qualquer e d uma recta não perpendicular a P. A projecção no plano P, paralelamente a d, de cada um dos pontos de um objecto constitui uma representação deste objecto designada por *perspectiva oblíqua* (figura 10).

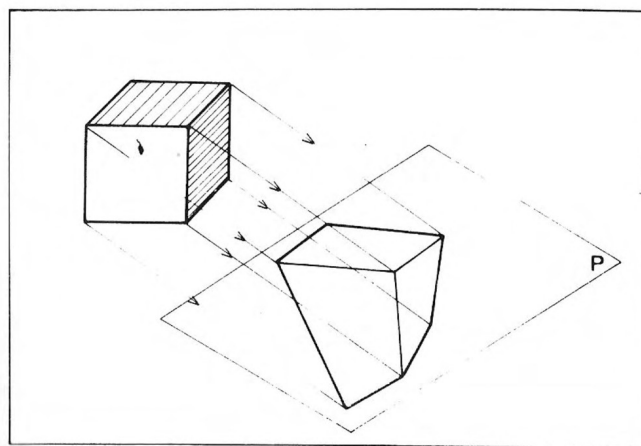


Fig. 10

1. Princípio da representação

Se o espaço referido a um sistema ortonormado $(O, \vec{i}_1, \vec{j}_1, \vec{k}_1)$, o plano P tem por equação $ax + by + cz + d = 0$, não sendo a, b e c simultaneamente nulos. De facto, podemos substituir P por um plano paralelo P' contendo o ponto O .

A equação deste plano é $ax + by + cz = 0$. Para obtermos a perspectiva oblíqua de um objecto, necessitamos de:

1. Encontrar um referencial $(O, \vec{i}_2, \vec{j}_2, \vec{k}_2)$ ortonormado e com o mesmo sentido que $(O, \vec{i}_1, \vec{j}_1, \vec{k}_1)$, ligado ao plano P' de tal modo que $(O, \vec{i}_2, \vec{k}_2)$ seja um referencial ortonormado directo deste plano P' .
2. Calcular, no sistema $(O, \vec{i}_2, \vec{j}_2, \vec{k}_2)$, as coordenadas da projecção sobre P' de cada um dos pontos do objecto a representar (naturalmente todas as suas coordenadas segundo \vec{j}_2 serão nulas).

2. Mudança de referencial

O vector $\vec{v} = (a, b, c)$ é normal (perpendicular) ao plano P' . Consideremos

$$d_1 = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

O vector $\vec{j}_2 = \left(\frac{a}{d_1}, \frac{b}{d_1}, \frac{c}{d_1}\right)$ é um vector unitário normal ao plano P' .

Escolhamos agora um vector no próprio plano P' , por exemplo o vector $(b, -a, 0)$.

Consideremos $d_2 = \sqrt{a^2 + b^2}$

Se a e b não forem simultaneamente nulos, o vector

$\vec{i}_2 = \left(\frac{b}{d_2}, -\frac{a}{d_2}, 0\right)$ encontra-se igualmente contido em P' , unitário e ortogonal a \vec{j}_2 .

Consideremos então $\vec{k}_2 = \vec{i}_2 \wedge \vec{j}_2$.

Este vector é unitário, ortogonal a \vec{i}_2 e a \vec{j}_2 e está contido no plano P' .

O referencial $(O, \vec{i}_2, \vec{j}_2, \vec{k}_2)$ é portanto ortonormado e tem o mesmo sentido de $(O, \vec{i}_1, \vec{j}_1, \vec{k}_1)$ (figura 11).

As coordenadas de \vec{k}_2 no primeiro sistema são:

$$-\frac{ac}{d_1 d_2}, -\frac{bc}{d_1 d_2}, \frac{a^2 + b^2}{d_1 d_2}$$

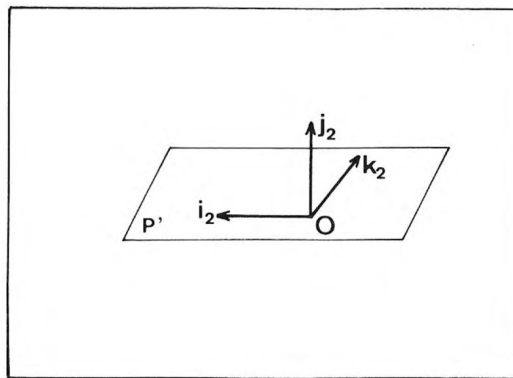


Fig. 11

3. Cálculo da imagem

Seja M' a projecção sobre P' de um ponto qualquer M do objecto a representar.

No sistema $(O, \vec{i}_1, \vec{j}_1, \vec{k}_1)$, M' terá as coordenadas x', y', z' , enquanto M terá as coordenadas x, y, z .

Sejam x'', y'' e z'' as coordenadas de M' relativamente ao sistema $(O, \vec{i}_2, \vec{j}_2, \vec{k}_2)$.

As fórmulas do capítulo 2, parágrafo 6.2, permitem-nos escrever:

$$x'' = \frac{b}{d_2} x' - \frac{a}{d_2} y'$$

$$y'' = \frac{a}{d_1} x' + \frac{b}{d_1} y' + \frac{c}{d_1} z' = 0$$

$$z'' = -\frac{ac}{d_1 d_2} x' - \frac{bc}{d_1 d_2} y' + \frac{a^2 + b^2}{d_1 d_2} z'$$

4. A imagem obtida é adaptada às dimensões do visor (ver o capítulo 3).

```

0000 REM enquadramento da imagem
0010 LET k=(vmax-vmin)/(umax-umi)
0020
0030 IF k>0.5 THEN LET s=1.5
0040 IF k>0.5 THEN LET s=1.5
0050 IF k<0.5 THEN LET s=1.5
0060 IF k<0.5 THEN LET s=1.5
0070 LET w1=1/(umax-umi)
0080 LET w2=1/(vmax-vmin)
0090 LET w3=1/(1/2*(umax+umi))
0100 LET w4=1/(1/2*(vmax+vmin))
0110 LET u(1)=0.5*(u1+u2)
0120 LET v(1)=0.5*(v1+v2)
0130 NEXT i

```

5. Desenha-se finalmente o objecto.

```

0000 REM tracado
0010 FOR p=1 TO 8
0020 READ i,j
0030 PLOT u(i),v(i)
0040 DRAW u(j)-u(i),v(j)-v(i)
0050 NEXT p

```

As figuras 12 e 13 mostram dois aspectos da pirâmide SABCD.

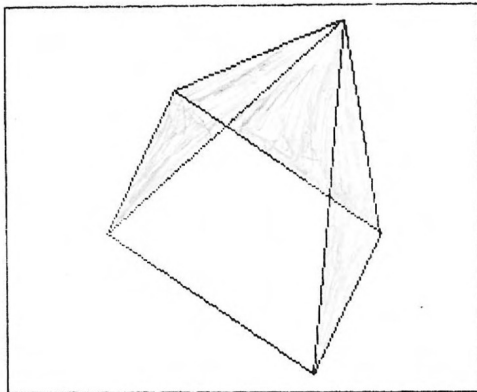


Fig. 12

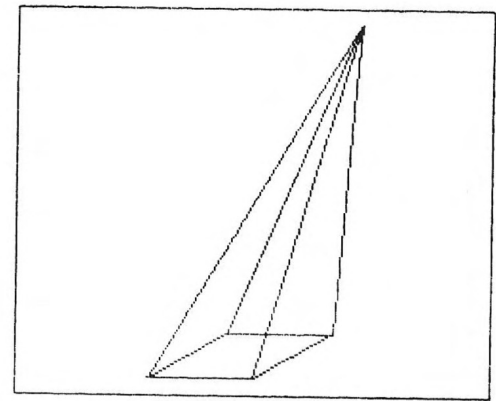


Fig. 13

6 Projecção de uma curva não contida num plano

Pode representar-se uma curva deste tipo recorrendo a projecções num plano.

1. Definição

Seja $Oxyz$ um sistema de coordenadas ortonormado e sejam f , g e h três funções da variável t .

Consideremos $x = f(t)$, $y = g(t)$ e $z = h(t)$. Os três números x , y , z assim definidos podem ser considerados como coordenadas de um ponto do espaço. Para t variando entre t_1 e t_2 , define-se assim uma curva do espaço.

2. Programa

Para obter um programa que permita desenhar uma curva $x = f(t)$, $y = g(t)$, $z = h(t)$ em projecção num plano de equação $ax + by + cz = 0$, basta modificar ligeiramente o programa anterior.

```

5 REM definicao da curva
10 DEF FN f(t)=COS t
20 DEF FN g(t)=SIN t
30 DEF FN h(t)=t
35 REM intervalo da definicao
40 INPUT "MINIMO DE T? ";tmin
50 INPUT "MAXIMO DE T? ";tmax
60 INPUT "O INTERVALO [TMIN,TH
AX] ESTA DIVIDIDO EM N PARTES I
GUARIS. INDIQUE N: ";n
70 DIM t(1+n): DIM x(1+n): DIM
y(1+n): DIM z(1+n)
80 FOR i=1 TO 1+n
90 LET t(i)=tmin+(i-1)*(tmax-t
min)/n
100 NEXT i
110 FOR i=1 TO 1+n
120 LET x(i)=FN f(t(i))
130 LET y(i)=FN g(t(i))
140 LET z(i)=FN h(t(i))
141 NEXT i
145 REM caracteristicas da proj
eccao
150 PRINT "A EQUACAO DO PLANO D
E PROJECCAO E' AX+BY+CZ=0 (A,B,C
NAO NULOS)"
160 INPUT "INDIQUE A ";a
170 INPUT "INDIQUE B ";b
180 INPUT "INDIQUE C ";c
190 IF a=0 AND b=0 AND c=0 THEN
GO TO 9999
200 IF a=0 AND b=0 THEN PRINT "
IMPOSSIVEL": GO TO 9999
210 PRINT "A PROJECCAO E' FEITA
PARALELA- MENTE A UMA RECTA DE
VECTOR DIRECTOR (UX,UY,UZ)"
220 INPUT "INDIQUE UX ";vx
230 INPUT "INDIQUE UY ";vy
240 INPUT "INDIQUE UZ ";vz
250 LET a=a*vx+b*vy+c*vz
260 IF a=0 THEN PRINT "IMPOSSIV
EL": GO TO 9999
270 CLS
275 REM calculo da projeccao
280 FOR i=1 TO n+1
290 LET k=-(a*x(i)+b*y(i)+c*z(i)
)
300 LET x(i)=x(i)+k*vx
310 LET y(i)=y(i)+k*vy
320 LET z(i)=z(i)+k*vz
330 NEXT i
370 DIM u(n+1)
380 DIM v(n+1)
390 LET d1=SOR (a*a+b*b+c*c)
400 LET d2=SOR (a*a+b*b)

```

```

410 LET umin=10e30
420 LET umax=-10e30
430 LET vmin=-10e30
440 LET vmin=10e30
450 FOR i=1 TO n+1
460 LET u(i)=(b*x(i)-a*y(i))/d2
470 LET v(i)=-(a*c*x(i)+b*c*y(i)
)-(a*a+b*b)*z(i)/d1/d2
480 IF u(i)<umin THEN LET umin=
u(i)
490 IF v(i)<vmin THEN LET vmin=
v(i)
500 IF v(i)>vmax THEN LET vmax=
v(i)
510 IF u(i)>umax THEN LET umax=
u(i)
520 NEXT i
525 REM enquadramento da imagem
530 LET k=(vmax-vmin)/(umax-umi
n)
540 IF k>0.6 THEN LET h=150
550 IF k>0.6 THEN LET l=h/k
560 IF k<0.6 THEN LET l=250
570 IF k<0.6 THEN LET h=l*k
580 LET a1=l/(umax-umin)
590 LET a2=h/(vmax-vmin)
600 LET b1=128-l/2-a1*umin
610 LET b2=88-h/2-a2*vmin
620 FOR i=1 TO n+1
630 LET u(i)=a1*u(i)+b1
640 LET v(i)=a2*v(i)+b2
650 NEXT i
655 REM tracado
660 FOR i=1 TO n
680 PLOT u(i),v(i)
690 DRAW u(i+1)-u(i),v(i+1)-v(i)
)
700 NEXT i

```

Para utilizar este programa, deveremos primeiramente definir a curva nas linhas 10, 20 e 30 graças a três instruções DEF FN.

3. Exemplo

As figuras 14, 15 e 16 representam uma hélice circular que admite como representação paramétrica $x = R \cos t$, $y = R \sin t$ e $z = kt$.

A figura 14 representa uma projecção ortogonal desta hélice no plano zOy.

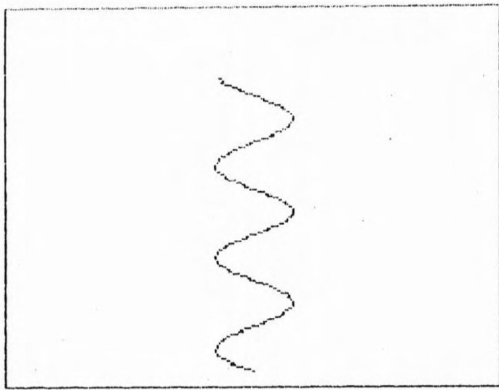


Fig. 14

No caso da figura 15, utilizou-se uma projecção no plano xOz paralelamente à recta de vector director $(1, 1, 1)$.

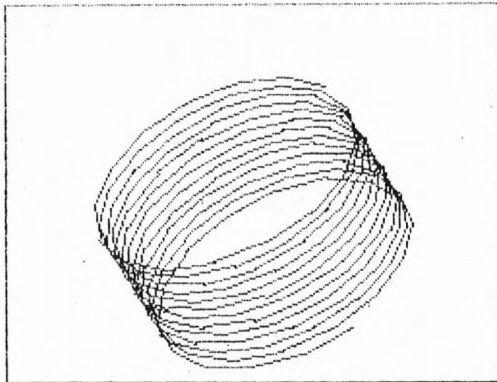


Fig. 15

A figura 16 representa finalmente uma projecção da hélice no plano $x + y + z = 0$, paralelamente à recta de vector director $(1, 0, 1)$.

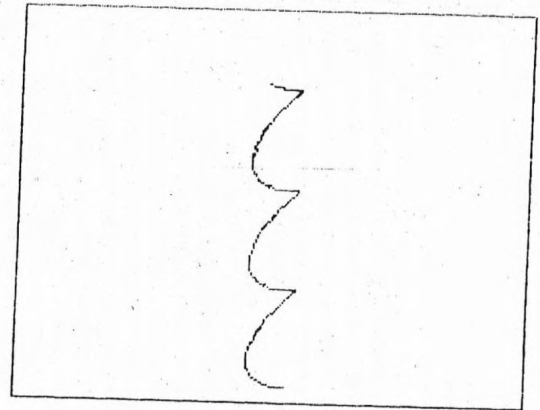


Fig. 16

A PERSPECTIVA CAVALEIRA

Utilizada em pintura desde o século XIV, a *perspectiva cavaleira* serviu, a partir do século XV, para a representação das construções fortificadas (figura 1).

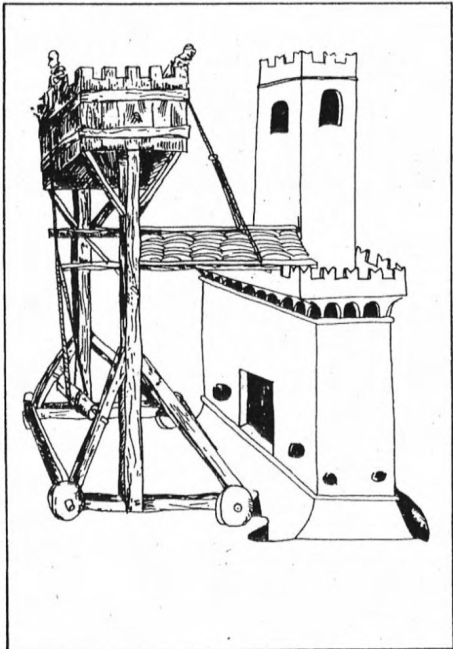


Fig. 1 — Torre de assalto a uma fortaleza. Século XIV.

No vocabulário da época usava-se por vezes o termo «cavaleiro» a propósito de uma parte fortificada situada atrás de uma obra defensiva.

Mais tarde a perspectiva cavaleira foi praticamente reservada ao uso em arquitectura e em desenho técnico.

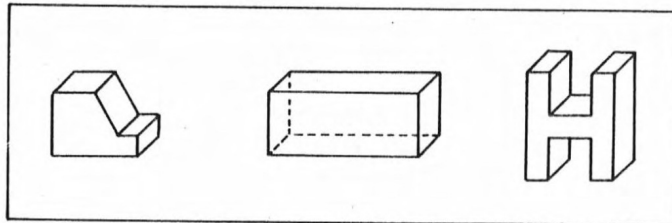


Fig. 2

Caso particular das projecções cilíndricas, a perspectiva cavaleira permite apresentar o volume e o relevo de um modo simples (figura 2).

1 Representação de um poliedro

Para obter uma perspectiva cavaleira de um objecto poliédrico, por exemplo um cubo ou um paralelepípedo, existem algumas regras bastante fáceis de usar na prática.

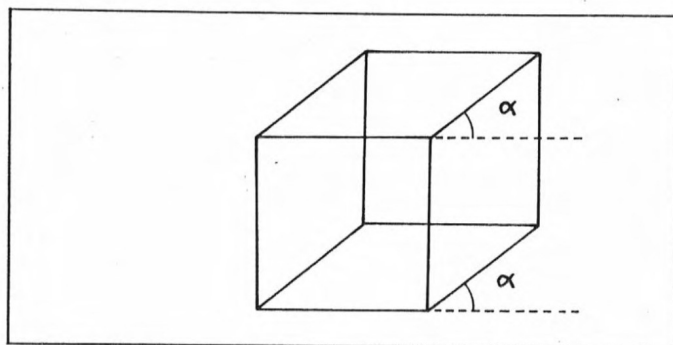


Fig. 3

1. Escolhe-se uma das faces do objecto como face principal. O plano de projecção será paralelo ao plano que contém esta face.
2. Qualquer face do objecto contida num plano paralelo ao plano de projecção é representada sem deformação, em tamanho natural.
3. Qualquer aresta perpendicular ao plano de projecção é representada por um segmento fazendo um determinado ângulo α com a horizontal. Este ângulo α , escolhido de início, é designado ângulo de fuga (figura 3).

A imagem de uma aresta perpendicular ao plano de projecção é uma recta de fuga.

4. O comprimento desta recta de fuga é obtido multiplicando o comprimento verdadeiro da aresta por um número k compreendido entre 0 e 1. k é o coeficiente de redução da perspectiva.

As regras precedentes são válidas para um desenho à escala 1. No caso de uma escala diferente, multiplicam-se os comprimentos correspondentes à escala 1 pelo número apropriado, designado factor de escala.

2 Representação de um círculo

A representação das curvas em perspectiva cavaleira não obedece a regras tão simples como as apresentadas anteriormente. Limitamo-nos geralmente aos círculos, utilizando então as duas regras seguintes:

1. Qualquer círculo contido num plano paralelo ao plano de projecção é representado em tamanho natural, sem deformações (figura 4).

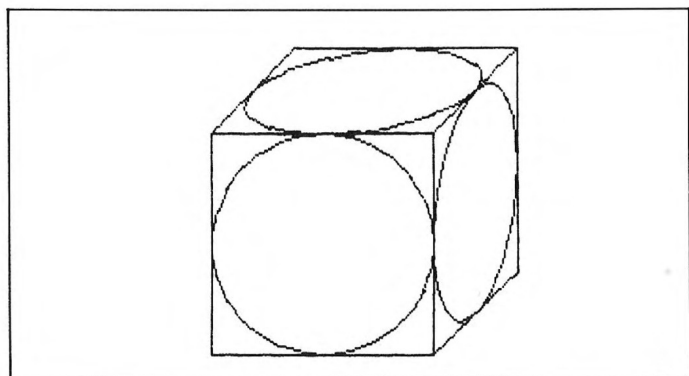


Fig. 4

2. Qualquer círculo contido num plano não paralelo ao plano de projecção é representado por uma elipse (figura 4).

3 Fórmulas de cálculo

Seja $M = (x, y, z)$ um ponto qualquer do objecto a representar em perspectiva cavaleira. Esta é definida por um ângulo de fuga α e um coeficiente de redução k .

O ponto M' , imagem de M nesta perspectiva, tem como coordenadas u e v relativamente a um sistema ortonormado $O'uv$ do plano de projecção. Propomo-nos calcular u e v em função de x, y e z .

1. Cálculos

Em vez de utilizarmos as fórmulas do capítulo 5, parágrafo 5.3, vamos recorrer às regras enunciadas no parágrafo 1 anterior.

Sejam H, C e D as projecções ortogonais do ponto M nos planos xOy, yOz e xOz . Definimos assim um paralelepípedo recto de dimensões x, y e z (figura 5).

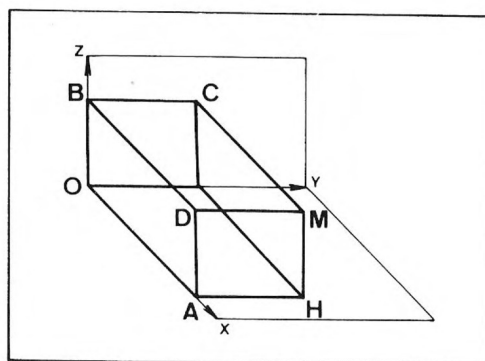


Fig. 5

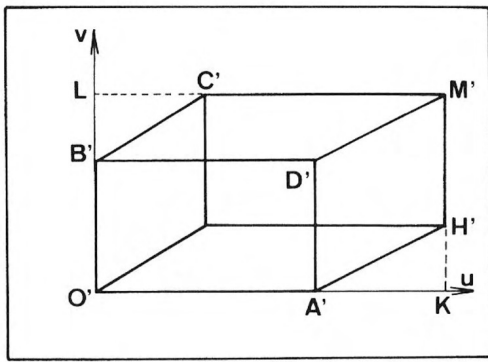


Fig. 6

A figura 6 mostra a perspectiva cavaleira deste paralelepípedo, desenhada no plano de projecção. As arestas OA e OB são vistas em tamanho natural:

$$\overline{O'A'} = \overline{OA} = x$$

e

$$\overline{O'B'} = \overline{OB} = z$$

As arestas BC e AH são representadas respectivamente pelos segmentos de fuga B'C' e A'H'.

Teremos, portanto, $\overline{B'C'} = k \overline{BC}$ e $\overline{A'H'} = k \overline{AH}$.

Resulta daqui:

$$\overline{B'C'} = \overline{A'H'} = k y$$

Como

$$\overline{O'L} = \overline{O'B'} + \overline{B'L}$$

e

$$\overline{O'K} = \overline{O'A'} + \overline{A'K}$$

obtemos

$$\overline{O'L} = \overline{O'B'} + \overline{B'C'} \sin \alpha$$

e

$$\overline{O'K} = \overline{O'A'} + \overline{A'H'} \cos \alpha$$

ou seja,

$$u = x + k y \cos \alpha$$

e

$$v = z + k y \sin \alpha$$

2. Fórmulas

Uma perspectiva cavaleira associa portanto o ponto $M' = (u, v)$ do plano de projecção ao ponto do espaço $M = (x, y, z)$.

Se α for o ângulo de fuga, e k o coeficiente de redução, teremos:

$$u = x + k y \cos \alpha$$

$$v = z + k y \sin \alpha$$

3. No programa, poderemos substituir $k \cos \alpha$ e $k \sin \alpha$ por coeficientes numéricos calculados previamente.

Por exemplo, para $k = 0,5$ e $\alpha = 45^\circ$, poderemos escrever $u = x + 0,353 y$ e $v = z + 0,353 y$.

4 Um exemplo detalhado: o cubo

Escolhamos um cubo cujas dimensões dependam de uma unidade de comprimento $u_L \leq 50$.

A figura 7 indica o referencial escolhido e a numeração dos vértices.

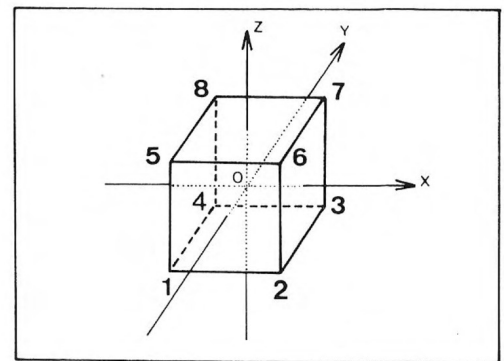


Fig. 7

1. Programa

Este programa é constituído por cinco partes.

1. Calculemos, no sistema de coordenadas escolhido, as coordenadas de cada um dos oito vértices.

Os resultados são apresentados na tabela seguinte:

N.º do vértice	x	y	z
1	-u _L	-u _L	-u _L
2	u _L	-u _L	-u _L
3	u _L	u _L	-u _L
4	-u _L	u _L	-u _L
5	-u _L	-u _L	u _L
6	u _L	-u _L	u _L
7	u _L	u _L	u _L
8	-u _L	u _L	u _L

Estas coordenadas são colocadas em memória graças a uma instrução DATA:

```

10 INPUT "ESCOLHA UMA UNIDADE
DE COMPRI- MENTO ";UL
20 DATA -1,-1,-1,1,-1,-1,1,1,-
1,-1,1,-1,-1,-1,1,1,-1,1,1,-
1,1,1
30 DIM X(8)
40 DIM U(8)
50 DIM V(8)
60 FOR I=1 TO 8
70 READ X,U,Z
80 LET X(I)=X*UL
90 LET U(I)=U*UL
100 LET V(I)=Z*UL
110 NEXT I

```

2. A ordem pela qual as arestas serão traçadas é igualmente colocada em memória graças a uma segunda instrução DATA.

Cada aresta é referenciada pelos números das suas extremidades.

```

120 DATA 1,2,2,3,3,4,4,1,1,5,2,
6,3,7,4,8,5,6,6,7,7,8,8,8

```

3. A perspectiva cavaleira escolhida tem como ângulo de fuga α e como coeficiente de redução k. Escolhamos α e k.

```

130 INPUT "RAZAO DE REDUCAO K?"
K
140 INPUT "ANGULO DE FUGA A 1GR
AUS?"
150 LET A=A*PI/180
160 LET C1=K*COS A
170 LET C2=K*SIN A

```

4. As coordenadas das projecções de cada um dos vértices do cubo são calculadas graças às fórmulas do parágrafo 3.2.

```

180 DIM U(8)
190 DIM V(8)
200 FOR I=1 TO 8
210 LET U(I)=X(I)+C1*U(I)
220 LET V(I)=Z(I)+C2*U(I)
230 NEXT I

```

5. O desenho de cada uma das doze arestas do cubo é efectuado usando uma instrução READ para ler os números dos vértices a juntar.

```

240 FOR N=1 TO 12
250 READ I,J
260 PLOT 120+U(I),88+V(I)
270 DRAW U(J)-U(I),V(J)-V(I)
280 NEXT N

```

2. Representações do cubo

A figura 8 apresenta a perspectiva cavaleira obtida para $\alpha = 60^\circ$, $k = 0,5$.

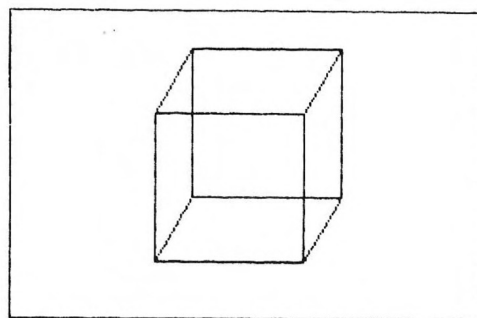


Fig. 8

Podem ser escolhidos outros valores para α e para k (ver as figuras 9 e 10).

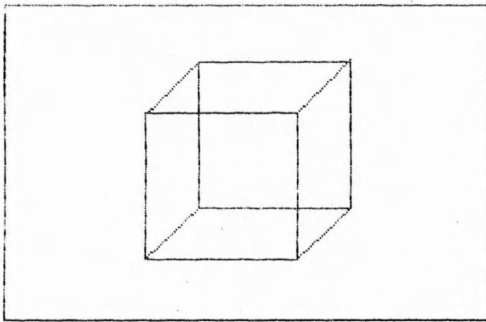


Fig. 9 — A = 45 graus

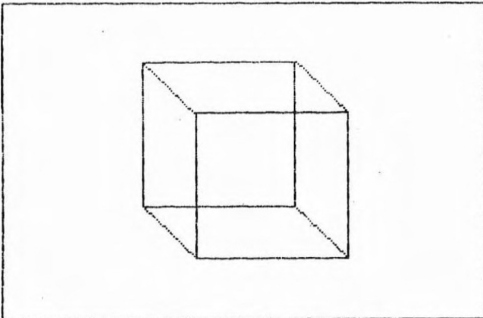


Fig. 10 — A = 135 graus

3. Deslocamentos do cubo

Antes de traçarmos a vista do cubo em perspectiva, poderemos modificar a posição deste relativamente ao referencial escolhido.

A título de exemplo, acrescentaremos ao programa anterior uma rotação de ângulo α_y em torno do eixo Oy.

O ângulo α_y , representado pela variável AY, é dado em graus.

```

10 INPUT "ESCOLHA UMA UNIDADE
DE COMPRI- MENTO ";UL
20 DATA -1,-1,-1,1,-1,-1,1,1,-
1,-1,1,-1,-1,1,1,-1,1,1,1,-
1,1,1
30 DIM X(8)
40 DIM Y(8)
50 DIM Z(8)
60 FOR I=1 TO 8
70 READ X,Y,Z
80 LET X(I)=X*UL
90 LET Y(I)=Y*UL
100 LET Z(I)=Z*UL
110 NEXT I
120 DATA 1,2,2,3,3,4,4,1,1,5,2,
5,3,7,4,8,5,6,6,7,7,8,8,5
130 PRINT "O CUBO DEVE EFECTUAR
UMA ROTACAO DE EIXO OY (S/N)?"
140 INPUT A$
150 CLS
160 IF A$="N" THEN GO TO 1300
170 INPUT "ANGULO DE ROTACAO (G
RAUS) ? ";AY
180 LET AY=AY*PI/180
190 LET C=COS AY
200 LET S=SIN AY
210 FOR I=1 TO 8
220 LET T=X(I)*C-Z(I)*S
230 LET T=X(I)*S+Z(I)*C
240 LET X(I)=T
250 LET Z(I)=T
260 NEXT I
1300 INPUT "RAZAO DE REDUCAO K?"
";K
1400 INPUT "ANGULO DE FUGA (GRAU
S) ? ";A
1500 LET A=A*PI/180
1600 LET C1=K*COS A
1700 LET C2=K*SIN A
1800 DIM U(8)
1900 DIM V(8)
2000 FOR II=1 TO 8
2100 LET U(II)=X(II)+C1*Y(II)
2200 LET V(II)=Z(II)+C2*Y(II)
2300 NEXT II
2400 FOR N=1 TO 12
2500 READ I,J
2600 PLOT 128+U(I),88+V(I)
2700 DRAW U(J)-U(I),V(J)-V(I)
2800 NEXT N

```


Foram aqui usadas as fórmulas do capítulo 3, parágrafo 4.2, servindo as variáveis R e T para calcular os valores definitivos de x e y.

As linhas 1300 a 2800 do programa correspondem exactamente às linhas 130 a 280 do programa do parágrafo 4.1.

As figuras 11, 12 e 13 mostram as vistas em perspectiva obtidas para $\alpha_y = 30^\circ$, $\alpha_y = 45^\circ$ e $\alpha_y = 15^\circ$.

Fig. 11 — Rotação de 15 graus.

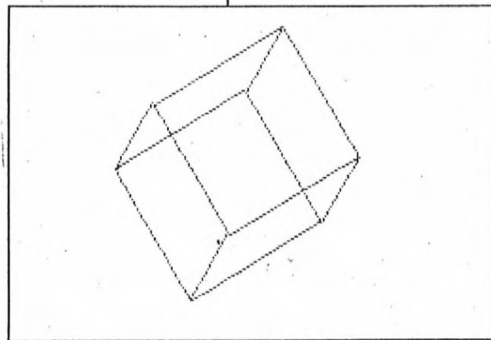
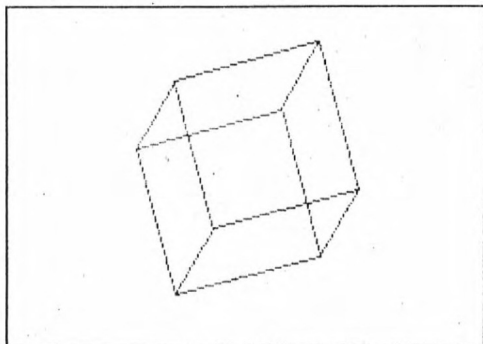
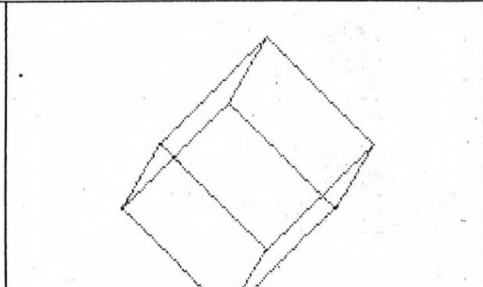


Fig. 12 — Rotação de 30 graus.

Fig. 13 — Rotação de 45 graus.



5 Perspectiva de uma curva

Modificando ligeiramente o programa do capítulo 5, parágrafo 6.2, poderemos representar uma curva $x=f(t)$, $y=g(t)$, $z=h(t)$ em perspectiva cavaleira.

O programa é o seguinte:

```

5 REM equacoes da curva
10 DEF FN f(t)=COS t
20 DEF FN g(t)=SIN t
30 DEF FN h(t)=0
45 REM intervalo de variacao d
o parametro t
40 INPUT "MINIMO DE T? ";tmin
50 INPUT "MAXIMO DE T? ";tmax
60 INPUT "O INTERVALO ITHIN,TH
AXJ ESTA DI-VIDIDO EM N PARTES I
GUAIS. INDIQUE N: ";n
65 LET l=(tmax-tmin)/n
70 DIM t(1+n)
80 DIM x(1+n)
90 DIM y(1+n)
100 DIM z(1+n)
110 FOR i=1 TO 1+n
120 LET x(i)=FN f(t(i))
130 LET y(i)=FN g(t(i))
140 LET z(i)=FN h(t(i))
150 LET t(i)=tmin+(i-1)*l
160 NEXT i
170 REM calculo da imagem
180 LET umax=-10e30
190 LET vmax=-10e30
200 LET umin=10e30
210 LET vmin=10e30
220 DIM u(n+1)
230 DIM v(n+1)
240 FOR i=1 TO n+1
250 LET u(i)=x(i)+0.375*y(i)
260 LET v(i)=z(i)+0.375*y(i)
270 IF u(i)>umax THEN LET umax=
u(i)
280 IF u(i)<umin THEN LET umin=
u(i)
290 IF v(i)>vmax THEN LET vmax=
v(i)
300 IF v(i)<vmin THEN LET vmin=
v(i)
310 NEXT i
315 REM enquadramento da imagem
320 LET kp=(vmax-vmin)/(umax-um
in)
330 IF kp>0.6 THEN LET ha=150
340 IF kp>0.6 THEN LET la=ha/kp
350 IF kp<0.6 THEN LET la=250

```

```

360 IF kp<=0.6 THEN LET ha=la#k
P
370 LET a1=la/(umax-umin)
380 LET a2=ha/(vmax-vmin)
390 LET b1=120-la/2-a1*umin
400 LET b2=88-ha/2-a2*vmin
410 FOR i=1 TO n+1
420 LET u(i)=a1*u(i)+b1
430 LET v(i)=a2*v(i)+b2
440 NEXT i
445 REM tracado
450 FOR i=1 TO n
460 PLOT u(i),v(i)
470 DRAW u(i+1)-u(i),v(i+1)-v(i)
)
480 NEXT i

```

A figura 14 representa o círculo $x = \cos t$, $y = \sin t$, $z = 0$ em perspectiva; considerámos $N = 40$ e $0 \leq t \leq 2\pi$: obtemos de facto uma elipse.

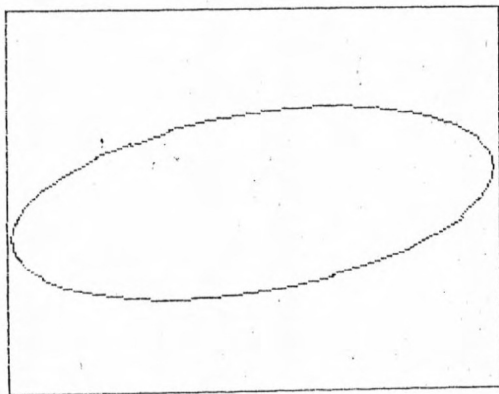


Fig. 14

A figura 15 representa uma hélice cónica de equações $x = t \cos t$, $y = t \sin t$, $h = t$ com $N = 100$ e $0 \leq t \leq 4\pi$.

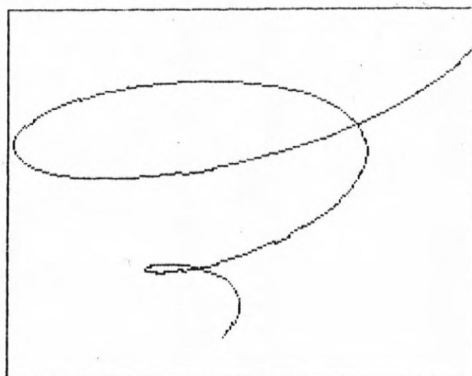


Fig. 15

PRISMAS E PIRÂMIDES

Podemos representar a maior parte dos objectos de maneira exacta ou aproximada utilizando um ou vários poliedros: cubo, paralelepípedo, prismas, etc.

Neste capítulo, estudaremos mais exactamente os prismas e os troncos de prisma, as pirâmides e os troncos de pirâmides.

O método seguido para representar estes poliedros será exposto para casos particulares.

1 Os prismas e os troncos de prisma

1. Seja L uma linha poligonal simples e fechada, traçada num plano P . Escolhamos uma recta d que intersecte o plano P num só ponto.

Por qualquer ponto de L passa uma paralela a d e só uma. O conjunto das rectas assim definidas constitui uma superfície prismática (figura 1).

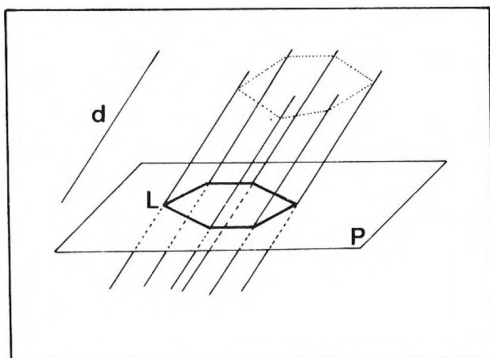


Fig. 1

2. Se cortarmos uma superfície destas por dois planos distintos P_1 e P_2 , obteremos um prisma no caso de P_1 e P_2 serem paralelos, um tronco de prisma no caso contrário (figura 2).

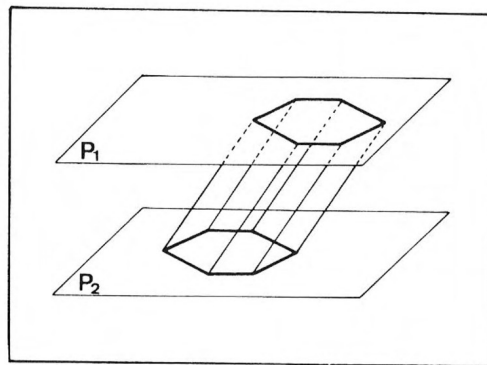


Fig. 2

3. Podemos generalizar a noção de prisma considerando L uma linha plana qualquer, por exemplo com partes curvas, mas sempre simples e fechada.

É então prático distinguir uma face dianteira e uma face traseira. Esta última é obtida por translação a partir da face dianteira (figura 3).

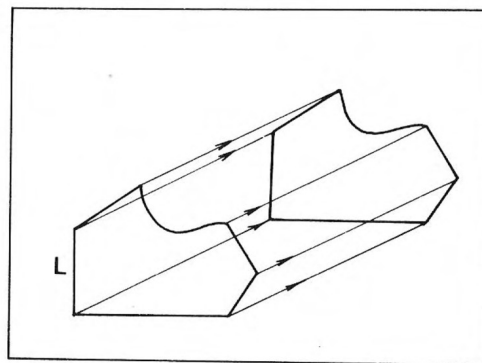


Fig. 3

2 Pirâmides e troncos de pirâmides

1. L designa novamente uma linha poligonal simples e fechada, contida num plano P. Seja S um ponto qualquer fora do plano P. Ligando S a cada um dos vértices de L, obtemos uma pirâmide (figura 4).

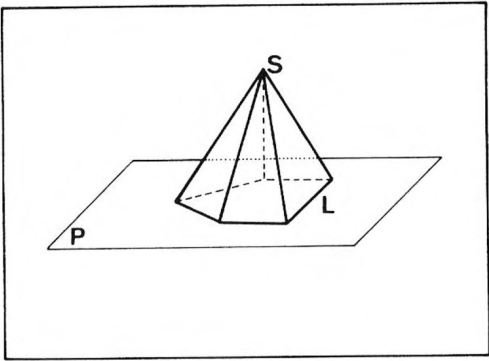


Fig. 4

2. Se cortarmos uma pirâmide por um plano qualquer, obtemos um tronco de pirâmide (figura 5), com bases paralelas ou não.

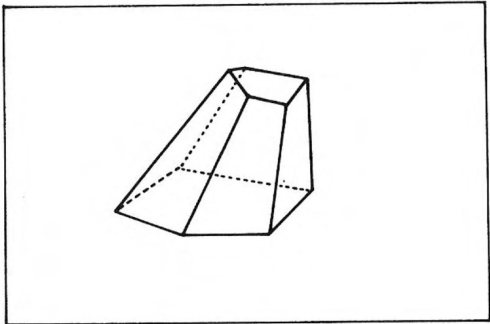


Fig. 5

3 Primeiro exemplo: prisma recto

Consideremos o poliedro da figura 6: trata-se de um prisma recto. Para representar este prisma utilizaremos um programa em cinco partes.

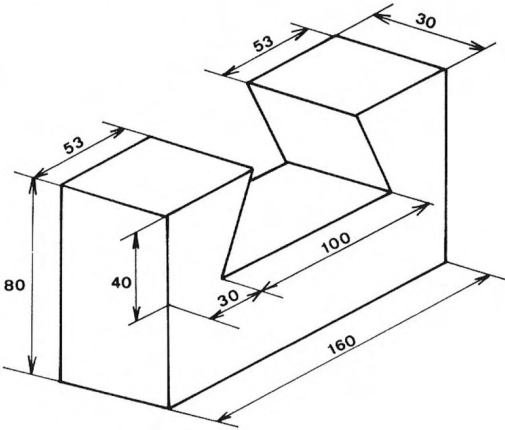


Fig. 6

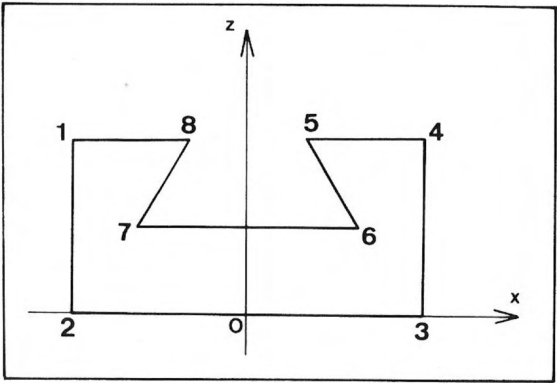


Fig. 7

1. Cálculo das coordenadas

Numeremos os vértices: de 1 a 8 para a face dianteira, de 9 a 16 para a face traseira (figura 7). Escolhamos um referencial Oxyz e calculemos as coordenadas de cada um dos dezasseis vértices relativamente a este sistema.

Estas coordenadas são indicadas na tabela que se segue:

Número	x	y	z	Número	x	y	z
1	-80	-30	40	9	-80	30	40
2	-80	-30	-40	10	-80	30	-40
3	80	-30	-40	11	80	30	-40
4	80	-30	40	12	80	30	40
5	27	-30	40	13	27	30	40
6	50	-30	0	14	50	30	0
7	-50	-30	0	15	-50	30	0
8	-27	-30	40	16	-27	30	40

Estes valores serão passados ao programa numa instrução DATA onde os três primeiros números serão as coordenadas x, y e z do vértice n.º 1, os três seguintes os do vértice n.º 2, etc.

```

5 REM coordenadas dos vertice
10 DATA -80,-30,40,-80,-30,-40
10 DATA -80,-30,-40,80,-30,-40,80,-30,40,
10 DATA -80,-30,40,-80,-30,-40,-27,-30,40,-8
10 DATA 80,-30,40,-80,-30,-40,80,-30,-40,80,
10 DATA 27,-30,40,50,30,0,-50,30,0,
10 DATA -27,30,40
20 DIM X(16)
30 DIM Y(16)
40 DIM Z(16)
50 FOR I=1 TO 16
60 READ X(I),Y(I),Z(I)
70 LET X(I)=X
80 LET Y(I)=Y
90 LET Z(I)=Z
100 NEXT I

```

2. Deslocamentos do prisma

Limitar-nos-emos a uma rotação em torno de cada um dos eixos do referencial, usando as fórmulas do capítulo 3, parágrafo 4.2.

```

105 REM rotacoes em torno dos e
ixos
110 INPUT "INDIQUE EM GRAUS (0
A 360) O ANGULO DE ROTACAO EM
TORNO DO EIXO OX " :rx
120 LET c=COS (rx*PI/180)
130 LET s=SIN (rx*PI/180)
140 FOR i=1 TO 16
150 LET u=y(i)*c-z(i)*s
160 LET v=y(i)*s+z(i)*c
170 LET y(i)=u
180 LET z(i)=v
190 NEXT i
200 INPUT "INDIQUE EM GRAUS (0
A 360) O ANGULO DE ROTACAO EM
TORNO DO EIXO OY " :ry
210 LET c=COS (ry*PI/180)
220 LET s=SIN (ry*PI/180)
230 FOR i=1 TO 16
240 LET u=x(i)*c-z(i)*s
250 LET v=x(i)*s+z(i)*c
260 LET x(i)=u
270 LET z(i)=v
280 NEXT i
290 INPUT "INDIQUE EM GRAUS (0
A 360) O ANGULO DE ROTACAO EM
TORNO DO EIXO OZ " :rz
300 LET c=COS (rz*PI/180)
310 LET s=SIN (rz*PI/180)
320 FOR i=1 TO 16
330 LET u=x(i)*c-y(i)*s
340 LET v=x(i)*s+y(i)*c
350 LET x(i)=u
360 LET y(i)=v
370 NEXT i

```

3. Cálculo da perspectiva

Escolhamos uma perspectiva cavaleira de ângulo $\alpha = 60^\circ$ e de coeficiente de redução $k = 0,5$.

Ao ponto (x, y, z) corresponderá o ponto (u, v) do plano de projecção.

```

375 REM calculo da imagem
380 LET xmax=-10000
390 LET xmin=10000
400 LET zmax=-10000
410 LET zmin=10000
420 FOR i=1 TO 16
430 LET X(i)=INT (0,5+x(i)+0,25
*y(i))
440 LET z(i)=INT (0,5+z(i)+0,43
3*y(i))

```

```

450 IF xmax<x(i) THEN LET xmax=
x(i)
460 IF xmin>x(i) THEN LET xmin=
x(i)
470 IF zmax<z(i) THEN LET zmax=
z(i)
480 IF zmin>z(i) THEN LET zmin=
z(i)
490 NEXT i

```

4. Enquadramento da imagem

Utilizaremos o sub-programa do capítulo 3, parágrafo 3.3 (os valores máximo e mínimo das coordenadas u e v serão calculados na terceira parte do programa).

```

400 REM enquadramento da imagem
500 LET kb=(zmax-zmin)/(xmax-xm
in)
510 IF kb>0,6 THEN LET hb=150
520 IF kb>0,6 THEN LET la=150/k
530 IF kb<0,6 THEN LET lb=250
540 IF kb<0,6 THEN LET ha=250*k
550 LET k1=lb/(xmax-xmin)
560 LET l1=150+(a/2-k1*xmax)
570 LET k0=hb/(zmax-zmin)
580 LET l0=250+ha/2-k0*zmax
590 FOR i=1 TO 16
600 LET x(i)=k1*x(i)+l1
610 LET z(i)=k0*z(i)+l0
620 NEXT i

```

5. O traçado

Para proceder ao traçado, devemos estabelecer uma lista das arestas. Cada aresta é designada pelos números dos dois vértices que a definem. A lista obtida é colocada na memória do computador graças a uma instrução DATA.

```

630 REM traçado
640 DATA 1,2,2,3,3,4,4,5,5,6,6,
7,7,8,8,1
650 DATA 9,10,10,11,11,12,12,13
,13,14,14,15,15,16,16,9

```

```

660 DATA 1,0,2,10,3,11,4,12,5,1
,6,14,7,15,8,16
670 FOR i=1 TO 24
680 READ a,b
690 PLOT x(a),z(a)
700 DRAW x(b)-x(a),z(b)-z(a)
710 NEXT i

```

6. Os resultados

As figuras 8, 9 e 10 mostram três vistas do prisma estudado. A primeira foi obtida após rotação de um ângulo de 90° em torno do eixo Ox, a segunda após rotação de 45° em torno ao eixo Oy, a terceira após rotação de 50° em torno do eixo Oz.

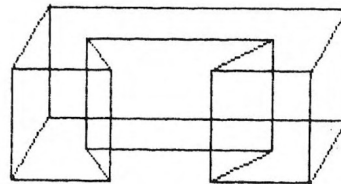


Fig. 8

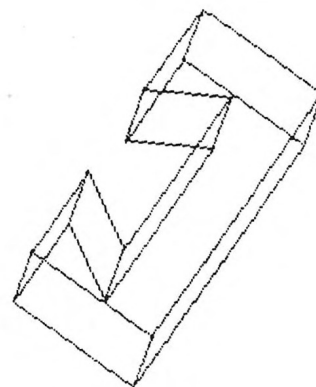


Fig. 9

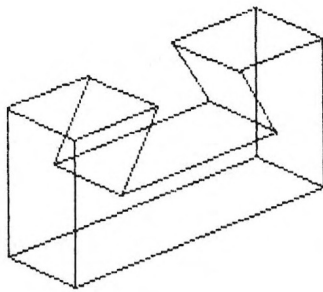


Fig. 10

4 Segundo exemplo: prisma com partes curvas

Consideremos o prisma representado pelas duas vistas da figura 11.

Este prisma oferece uma particularidade: a face dianteira e a face traseira possuem uma aresta curva, neste caso um quarto de círculo.

O programa de desenho deste prisma será formado também por cinco partes.

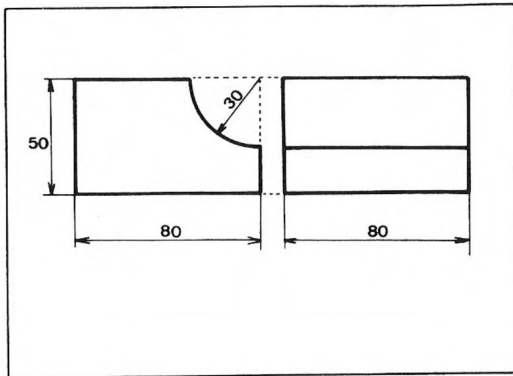


Fig. 11

1. Definição dos vértices

Na face dianteira, o arco AB será dividido em n partes iguais e substituído por uma linha poligonal com n segmentos. Haverá portanto $n - 1$ vértices intermédios entre A e B, donde $n + 4$ vértices no total para esta face.

A face traseira incluirá igualmente $n + 4$ vértices numerados entre $n + 5$ e $2n + 8$. Os eixos escolhidos e a numeração dos vértices são definidos na figura 12.

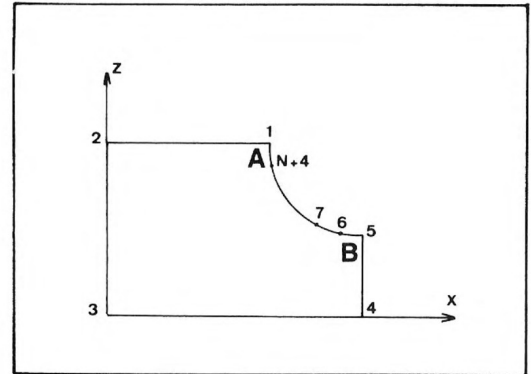


Fig. 12

2. Cálculo das coordenadas

As coordenadas dos vértices numerados de 1 a 5 na face dianteira são apresentadas na tabela seguinte:

Número	x	y	z
1	50	-40	50
2	0	-40	50
3	0	-40	0
4	80	-40	0
5	80	-40	20

As coordenadas x e z serão colocadas numa instrução DATA.
Para definir as coordenadas dos n-1 vértices situados no arco AB, utilizaremos a representação paramétrica de um círculo de raio R e centro (x_c, y_c): x = x_c + R cos t, z = z_c + R sen t com 0 ≤ t ≤ 2 π.
No caso presente x_c = 80, z_c = 50 e R = 30.

Para i variando entre 1 e n-1, podemos escrever

$$x(i) = 80 + 30 \cos \left(\frac{3\pi}{2} - \frac{\pi i}{n} \right)$$

$$z(i) = 50 + 30 \sin \left(\frac{3\pi}{2} - \frac{\pi i}{n} \right)$$

As coordenadas dos vértices da face traseira deduzem-se facilmente das dos vértices da face dianteira.

```
5 REM coordenadas dos vertice
10 LET n=20
20 DIM x(2*n+8)
30 DIM y(2*n+8)
40 DIM z(2*n+8)
50 DATA 50,50,0,50,0,0,80,0,80
60 FOR i=1 TO 5
70 READ x,z
80 LET x(i)=x
90 LET x(n+4+i)=x(i)
100 LET y(i)=-40
110 LET y(n+4+i)=40
120 LET z(i)=z
130 LET z(n+4+i)=z(i)
140 NEXT i
145 REM arestas circulares
150 FOR i=1 TO n-1
160 LET t=PI/180*(270-90*i/n)
170 LET x(i+5)=80+30*COS t
180 LET x(n+4+i+5)=x(i+5)
190 LET y(i+5)=-40
200 LET y(n+4+i+5)=40
210 LET z(i+5)=50+30*SIN t
220 LET z(n+4+i+5)=z(i+5)
230 NEXT i
```

3. A sequência do programa pode englobar as mesmas etapas do caso anterior:

- rotações eventuais do prisma;
- cálculo da perspectiva;
- enquadramento da imagem;
- traçado.

```
235 REM rotacao em torno do eix
240 INPUT "INDIQUE EM GRAUS (0
A 360) O ANGULO DE ROTACAO EM
TORNO DE OX: ";rx
250 LET c=COS (rx*PI/180)
260 LET s=SIN (rx*PI/180)
270 FOR i=1 TO 5
280 LET u=y(i)*c-z(i)*s
290 LET v=y(i)*s+z(i)*c
300 LET y(i)=u
310 LET z(i)=v
320 LET u=y(n+4+i)*c-z(n+4+i)*s
330 LET v=y(n+4+i)*s+z(n+4+i)*c
340 LET y(n+4+i)=u
350 LET z(n+4+i)=v
360 NEXT i
370 FOR i=1 TO n-1
380 LET u=y(i+5)*c-z(i+5)*s
390 LET v=y(i+5)*s+z(i+5)*c
400 LET y(i+5)=u
410 LET z(i+5)=v
420 LET u=y(n+5+i)*c-z(n+5+i)*s
430 LET v=y(n+5+i)*s+z(n+5+i)*c
440 LET y(n+5+i)=u
450 LET z(n+5+i)=v
460 NEXT i
465 REM calculo da imagem
470 FOR i=1 TO 2*n+8
480 LET x(i)=INT (0.5+x(i)+0.37
5*y(i))
490 LET z(i)=INT (0.5+z(i)+0.37
5*y(i))
500 NEXT i
510 REM tracado
520 PLOT 100+x(1),100+z(1)
530 FOR i=1 TO n+3
540 DRAW x(i+1)-x(i),z(i+1)-z(i)
550 NEXT i
560 DRAW x(1)-x(n+4),z(1)-z(n+4)
570 PLOT 100+x(n+5),100+z(n+5)
580 FOR i=1 TO n+3
590 DRAW x(n+5+i)-x(n+4+i),z(n+
5+i)-z(n+4+i)
600 NEXT i
610 DRAW x(n+5)-x(2*n+8),z(n+5)-
z(2*n+8)
620 FOR i=1 TO 5
630 PLOT 100+x(i),100+z(i)
640 DRAW x(n+4+i)-x(i),z(n+4+i)-
z(i)
650 NEXT i
```


4. Resultados

As figuras 13, 14 e 15 mostram o prisma em várias posições: após rotação de 20° em torno do eixo Ox, no caso da figura 13, após rotação de 45° em torno do eixo Ox, no da figura 14, e após rotação de 90° em torno do mesmo eixo, na figura 15.

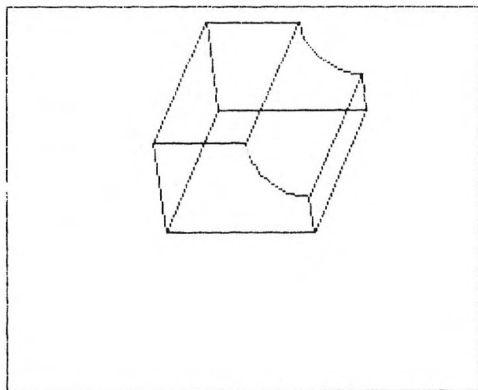


Fig. 13 — Rotação de 20 graus em torno do eixo Ox

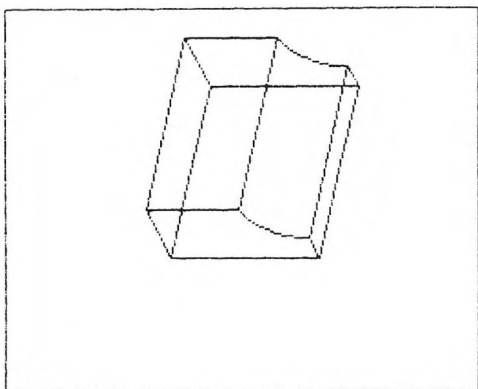


Fig. 14 — Rotação de 45 graus em torno do eixo Ox

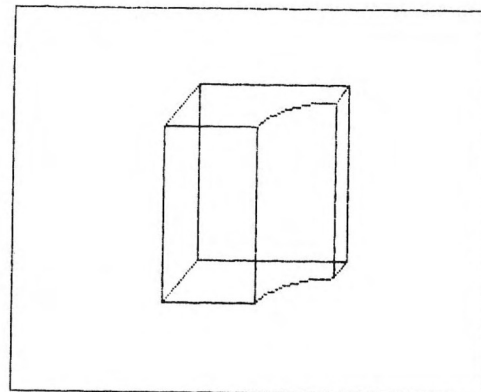


Fig. 15 — Rotação de 90 graus em torno do eixo Ox

5 Terceiro exemplo: pirâmide

Consideremos uma pirâmide de vértice S, cuja base é um polígono regular de n lados, inscrito num círculo de raio R e centro O.

Consideraremos um sistema ortonormado Oxyz de modo a que os eixos Ox e Oy estejam contidos no plano do polígono de base.

1. Cálculo das coordenadas

Sejam P_1, P_2, \dots, P_n os vértices do polígono regular.

Para fechar a linha poligonal $P_1 P_2 \dots P_n P_1$, definiremos um ponto suplementar considerando $P_{n+1} = P_1$.

Resulta daqui que, para $1 \leq i \leq n+1$, o ponto P_i tem como abcissa:

$$x(i) = R \cos \frac{2\pi(i-1)}{n}$$

por ordenada:

$$y(i) = R \sin \frac{2\pi(i-1)}{n}$$

e por cota

$$z(i) = 0$$

As coordenadas do vértice S da pirâmide serão designadas por x_s , y_s e z_s .

2. Programa

Engloba três partes:

- Linhas 10 a 150: cálculo das coordenadas;
- Linhas 160 a 210: cálculo da perspectiva;
- Linhas 220 a 570: enquadramento e traçado.

Se se desejar, será fácil acrescentar as instruções que permitem modificar a posição da pirâmide relativamente ao referencial escolhido.

```

S REM coordenadas dos vertice
5
10 INPUT "VALOR DE N? ";n
20 INPUT "VALOR DE R? ";r
30 INPUT "VALOR DE H? ";h
40 DIM x(n+1)
50 DIM y(n+1)
60 DIM z(n+1)
70 FOR i=1 TO n+1
80 LET t=2*PI*(i-1)/n
90 LET x(i)=r*COS t
100 LET y(i)=r*SIN t
110 LET z(i)=0
120 NEXT i
130 LET xs=0
140 LET ys=0
150 LET zs=h
155 REM calculo da imagem
160 FOR i=1 TO n+1
170 LET x(i)=INT (0.5+x(i)+0.37
S+y(i))
180 LET z(i)=INT (0.5+z(i)+0.37
S+y(i))
190 NEXT i
200 LET xs=INT (0.5+xs+0.375*ys
)
210 LET zs=INT (0.5+zs+0.375*ys
)
215 REM enquadramento da imagem
220 DIM u(n+2)
230 DIM v(n+2)
240 LET umax=-10e30
250 LET vmax=-10e30
260 LET umin=10e30
270 LET vmin=10e30
280 FOR i=1 TO n+2
290 IF i<>n+2 THEN LET u(i)=x(i)

```

```

300 IF i<>n+2 THEN LET v(i)=z(i)
)
310 IF i=n+2 THEN LET u(i)=xs
315 IF i=n+2 THEN LET v(i)=zs
320 IF u(i)>umax THEN LET umax=
u(i)
330 IF v(i)>vmax THEN LET vmax=
v(i)
340 IF u(i)<umin THEN LET umin=
u(i)
350 IF v(i)<vmin THEN LET vmin=
v(i)
360 NEXT i
370 LET ka=(vmax-vmin)/(umax-um
in)
380 IF ka>0.6 THEN LET ha=150
390 IF ka>0.6 THEN LET la=150/k
)
400 IF ka<=0.6 THEN LET la=250
410 IF ka<=0.6 THEN LET ha=250*
ka
420 LET k1=(la/(umax-umin))
430 LET l1=128+(la/2-k1*umax
)
440 LET k2=ha/(vmax-vmin)
450 LET l2=64+(ha/2-k1*vmax
)
460 FOR i=1 TO n+2
470 LET u(i)=k1*u(i)+l1
480 LET v(i)=k2*v(i)+l2
490 NEXT i
495 REM tracado
500 FOR i=1 TO n
510 PLOT u(i),v(i)
520 DRAW u(i+1)-u(i),v(i+1)-v(i)
)
530 NEXT i
540 FOR i=1 TO n
550 PLOT u(n+2),v(n+2)
560 DRAW u(i)-u(n+2),v(i)-v(n+2)
)
570 NEXT i

```

As figuras 16, 17 e 18 mostram as pirâmides obtidas para $n=4$, $n=5$ e $n=6$.

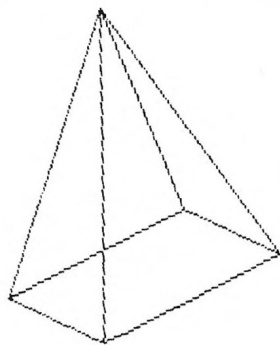


Fig. 16

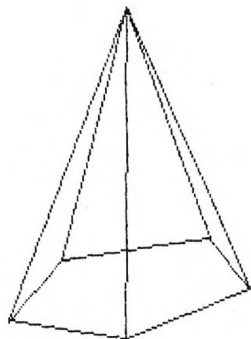


Fig. 17

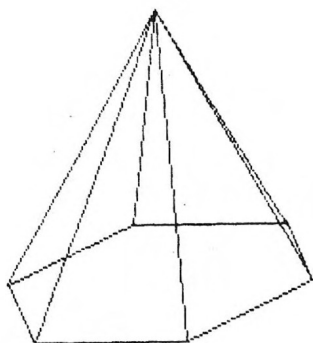


Fig. 18

PARTES ESCONDIDAS DE UM POLIEDRO CONVEXO

As figuras 1 e 2 representam o mesmo avião, um Alpha-Jet.

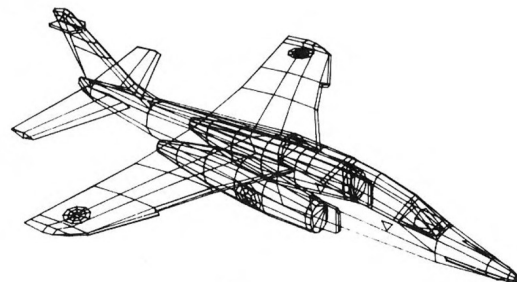


Fig. 1

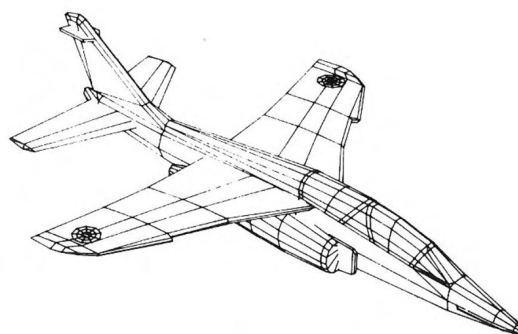


Fig. 2

No primeiro caso, todas as partes do avião foram representadas. No segundo caso, só as partes visíveis foram desenhadas, tendo sido eliminadas as partes escondidas.

Neste capítulo, mostraremos como proceder à eliminação das partes escondidas, limitando-nos no entanto ao caso de um poliedro convexo.

1 Poliedros convexos e não convexos

1. Faces e facetas

Um poliedro qualquer é constituído por uma justaposição de polígonos planos, as facetas. Cada uma destas apresenta uma face externa, dirigida para o exterior, e uma face interior.

Para um observador exterior ao poliedro, só as faces externas são visíveis (na medida, naturalmente, em que se supõe a superfície do poliedro opaca).

A figura 3 mostra um poliedro de que são visíveis quatro facetas num total de oito.

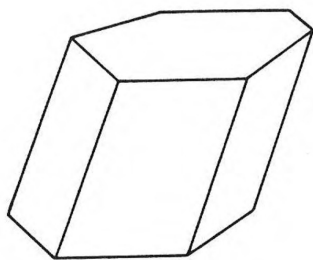


Fig. 3

2. Definição

Seja P um poliedro qualquer. Chamemos E à parte do espaço limitada por este poliedro, incluindo a superfície.

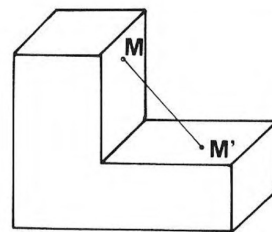


Fig. 4

Sejam M e M' dois pontos quaisquer de E : P é convexo se e só se o segmento MM' está contido em E .

O poliedro da figura 4 não é convexo porque existem dois pontos M e M' tais que MM' seja exterior ao poliedro.

3. Partes escondidas

Quando um poliedro não é convexo, algumas das suas partes podem ser escondidas por outras partes (ver a figura 5).

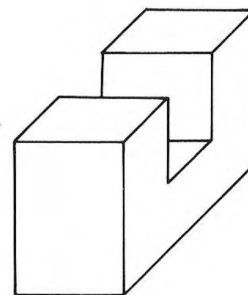


Fig. 5

Se o poliedro é convexo, nenhuma faceta pode ser escondida, sendo portanto todas elas completamente visíveis ou completamente invisíveis.

2 Orientação das facetas

1. Uma faceta apresenta um rebordo que pode ser orientado de duas maneiras opostas (figura 6).

O sentido negativo é aquele que corresponde ao sentido dos ponteiros do relógio.

O sentido positivo corresponde ao sentido contrário.

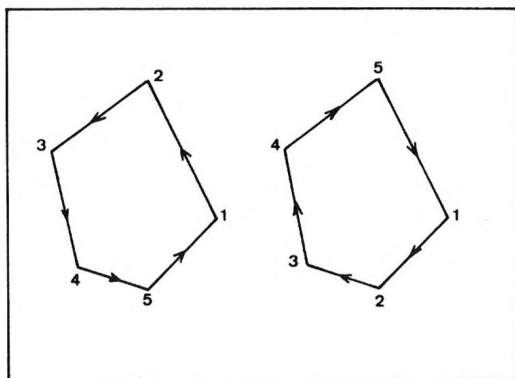


Fig. 6

2. Seja F uma faceta qualquer de um poliedro.

Diz-se que F está orientada positivamente quando, para um observador exterior ao poliedro, o rebordo desta faceta tem um sentido positivo (figura 7).

3 Como reconhecer as partes escondidas?

1. Caso particular

A figura 8 representa um cubo visto em perspectiva cavaleira. Os vértices do cubo foram numerados de forma arbitrária de 1 a 8. São visíveis três das seis facetas, as 1465, 1582 e 5678.

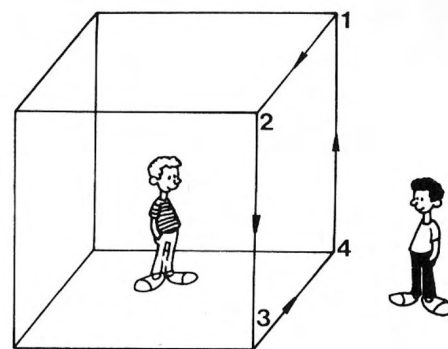


Fig. 7

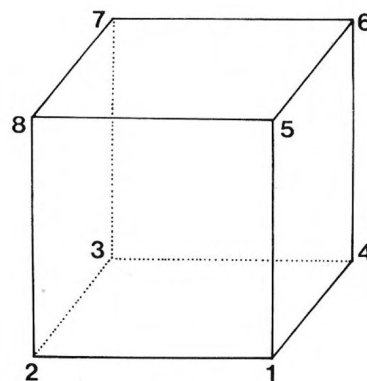


Fig. 8

Orientemos cada faceta do cubo positivamente e definamos para cada uma delas:

- a ordem dos números que corresponde a esta orientação positiva;
- a ordem pela qual se lê esta sequência de números na vista em perspectiva. Esta ordem será positiva ou negativa.

Obteremos assim a tabela seguinte:

Número da faceta	Ordem dos vértices da faceta orientada positivamente	Sentido do bordo da faceta na projecção	Faceta visível?
1	1234	—	não
2	5678	+	sim
3	1465	+	sim
4	1582	+	sim
5	2873	—	não
6	7642	—	não

Constatamos que uma faceta orientada positivamente não é vista quando a sua projecção tem uma orientação negativa.

2. Generalização

Generalizaremos o resultado anterior a qualquer poliedro convexo. Este resultado é válido qualquer que seja para qualquer tipo de projecção: cilíndrica, cónica ou perspectiva cavaleira.

4 Utilização de um produto vectorial

Seja F uma faceta orientada positivamente e seja F' a sua imagem no plano de projecção.

Para conhecer a orientação de F' , basta utilizar o facto de o produto vectorial não ser comutativo: para dois vectores \vec{u} e \vec{v} ,

$$\vec{v} \wedge \vec{u} = -\vec{u} \wedge \vec{v}$$

1. Fórmula geral

Designemos por $P_1, P_2, P_3, \dots, P_n$ os vértices de F' e consideremos

$$\vec{p} = \vec{P_1 P_2} \wedge \vec{P_1 P_3} + \vec{P_1 P_3} \wedge \vec{P_1 P_4} + \dots + \vec{P_1 P_{n-1}} \wedge \vec{P_1 P_n}$$

O vector \vec{p} é perpendicular ao plano de projecção dado que este contém os vectores $\vec{P_1 P_2}, \vec{P_1 P_3}, \dots, \vec{P_1 P_n}$.

Suponhamos o plano de projecção referido a um sistema ortonormalizado (O, \vec{u}, \vec{v}) .

Consideremos $\vec{w} = \vec{u} \wedge \vec{v}$: o referencial $(O, \vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ é ortonormalizado e constitui um referencial do espaço inteiro. Comparando os vectores \vec{p} e \vec{w} , podemos constatar que são possíveis três casos:

- \vec{p} é nulo. Neste caso, os pontos P_1, P_2, \dots, P_n estão alinhados, F' é um segmento de recta;
- \vec{p} não é nulo e tem o mesmo sentido de \vec{w} : F' tem uma orientação negativa (ver a figura 9);
- \vec{p} não é nulo e tem um sentido contrário ao sentido de \vec{w} : F' tem então uma orientação positiva.

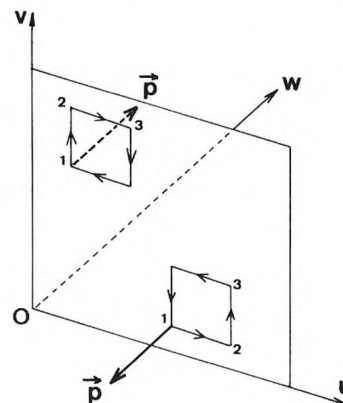


Fig. 9

2. Na prática

Contentar-nos-emos em utilizar apenas três pontos fazendo

$$\vec{p} = \vec{P_1 P_2} \wedge \vec{P_1 P_3}$$

Se u_1, u_2, u_3 e v_1, v_2, v_3 designam as coordenadas respectivas de P_1, P_2, P_3 no referencial Ouv , as do vector \vec{p} serão então 0, 0, $(u_2 - u_1)(v_3 - v_1) - (u_3 - u_1)(v_2 - v_1)$.

F' encontra-se orientada positivamente, sendo portanto visível, se o número $(u_2 - u_1)(v_3 - v_1) - (u_3 - u_1)(v_2 - v_1)$ é negativo ou nulo.

5 Um exemplo detalhado, o do cubo

Representemos em perspectiva cavaleira um cubo de 40 pixels de lado.

1. Descrição do cubo

A figura 10 indica como são numerados os vértices do cubo e qual é o referencial Oxyz escolhido.

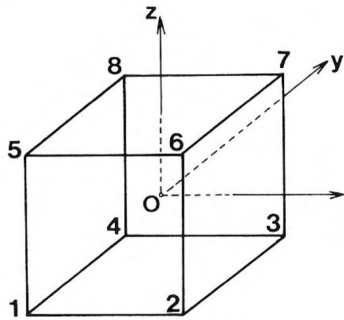


Fig. 10

a) A tabela seguinte, a que chamaremos tabela dos vértices, apresenta as coordenadas de cada um dos oito vértices do cubo no sistema escolhido:

Número do vértice	x	y	z
1	-1	-1	-1
2	1	-1	-1
3	1	1	-1
4	-1	1	-1
5	-1	-1	1
6	1	-1	1
7	1	1	1
8	-1	1	1

É necessário ler esta tabela do seguinte modo: no caso do vértice n.º 1 por exemplo, $x = -u_L$, $y = -u_L$ e $z = -u_L \cdot u_L$ designa a unidade de comprimento usada.

b) Definamos para cada faceta do cubo a sequência de números que correspondem a uma orientação positiva desta faceta:

Número da faceta	Sequência que define a faceta
1	1 2 6 5
2	2 3 7 6
3	1 4 3 2
4	1 5 8 4
5	8 7 3 4
6	8 5 6 7

Esta tabela é designada tabela das faces.

2. Programa

Este programa apresenta-se em cinco partes:

1.º Para i variando entre 1 e 8, as variáveis x (i), y (i), z (i) representam as coordenadas dos vértices do cubo. Colocadas em memória numa instrução DATA, estas coordenadas são lidas graças a uma instrução READ.

```
10 INPUT "INDIQUE UMA UNIDADE DE COMPRI- MENTO INFERIOR A 40: ",uL
20 DATA -1,-1,-1,1,-1,-1,1,1,-1,-1,1,-1,-1,1,1,-1,1,1,1,1,-1,1,1,1,-1,1,1,1,-1,1,1,1,-1,1,1,1
30 DIM X(8)
40 DIM Y(8)
50 DIM Z(8)
60 FOR i=1 TO 8
70 READ X(i),Y(i),Z(i)
80 LET X(i)=X(i)*uL
90 LET Y(i)=Y(i)*uL
100 LET Z(i)=Z(i)*uL
110 NEXT i
```

- 2.º É prevista uma rotação de ângulo θ em torno do eixo Oz (são possíveis rotações em torno dos outros eixos).

```

120 INPUT "PARA UMA ROTACAO EM
TORNO DO EIXO OZ, INDIQUE O A
NGULO (EM GRAUS); OU ESCREVA 0
":ar
130 LET c=COS (ar*PI/180)
140 LET s=SIN (ar*PI/180)
150 FOR i=1 TO 8
160 LET u=x(i)*c-y(i)*s
170 LET v=x(i)*s+y(i)*c
180 LET x(i)=u
190 LET y(i)=v
200 NEXT i

```

- 3.º Uma segunda instrução DATA contém as seis seqüências da tabela de faces.

```

210 DATA 1,2,5,5,2,3,7,5,1,4,3,
2,1,5,3,4,3,7,3,4,3,5,5,7

```

- 4.º Depois de escolhidos os parâmetros da perspectiva cava-leira, podemos calcular as coordenadas das projecções dos vértices. Conservámos as antigas variáveis x(i) e z(i).

```

220 FOR i=1 TO 8
230 LET x(i)=x(i)+0,353*y(i)
240 LET z(i)=z(i)+0,353*y(i)
250 NEXT i

```

- 5.º Os números dos vértices de cada faceta são lidos graças a uma instrução READ.

Para uma qualquer faceta, as coordenadas dos três vértices que vão servir para calcular o vector \vec{p} definido no parágrafo 4.2 são designadas respectivamente por x(a), z(a), x(b), z(b) e x(c), z(c).

Desenha-se a faceta correspondente se a 3.ª coordenada de \vec{P} é negativa ou nula.

```

260 FOR i=1 TO 6
270 READ a,b,c,d
280 LET p=(z(b)-z(a))*(x(c)-x(a)
)-(z(c)-z(a))*(x(b)-x(a))

```

```

290 IF p>0 THEN GO TO 350
300 PLOT 128+x(a),88+z(a)
310 DRAW x(b)-x(a),z(b)-z(a)
320 DRAW x(c)-x(b),z(c)-z(b)
330 DRAW x(d)-x(c),z(d)-z(c)
340 DRAW x(a)-x(d),z(a)-z(d)
350 NEXT i

```

3. Resultados

As figuras 11 e 12 mostram o cubo na sua posição inicial e após uma rotação de 60° em torno do eixo Oz.

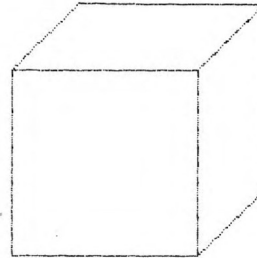


Fig. 11

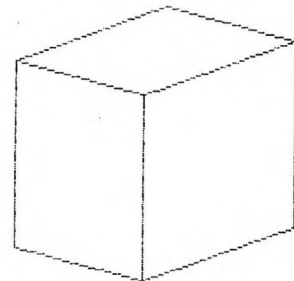


Fig. 12

Existem apenas cinco poliedros regulares convexos. Os geómetras gregos conheciam-nos já no século V a.C., mas foi Euclides que, no século III antes da nossa era, demonstrou que não existia qualquer outro.

Platão (428 a.C-348 a.C.) associou quatro destes poliedros aos quatro elementos: o cubo à terra, o octaedro ao ar, o tetraedro ao fogo e o icosaedro à água. O dodecaedro, finalmente, foi associado ao universo inteiro. Os poliedros regulares convexos são por vezes designados *sólidos de Platão*.

1 Definição

1. Um poliedro convexo é regular se possui as seguintes propriedades:
- Todas as suas arestas têm o mesmo comprimento;
 - Todas as suas faces são constituídas por polígonos regulares;
 - De cada um dos seus vértices parte o mesmo número de arestas.

2. A tabela que se segue apresenta as características de cada um dos cinco poliedros regulares:

Nome	Número de faces	Número de vértices	Número de arestas	Natureza das faces
Tetraedro	4	4	6	Triângulos equiláteros
Cubo	6	8	12	Quadrados
Octaedro	8	6	12	Triângulos equiláteros
Dodecaedro	12	20	30	Pentágonos regulares
Icosaedro	20	12	30	Triângulos equiláteros

2 Construção da imagem

- O cubo já foi representado diversas vezes. Resta, portanto, construir quatro poliedros.
- Cada construção será efectuada em três etapas.
1. É necessário antes de mais escolher um referencial ortonormado $Oxyz$ do modo mais simples possível, tendo em conta as diversas simetrias do poliedro.
- A unidade de comprimento ligada a este sistema será designada por u_L .
2. As coordenadas dos vértices serão apresentadas numa tabela dos vértices. Utilizaremos uma simplificação da escrita conservando apenas os coeficientes numéricos. Por exemplo, escreveremos $x = 2$ em vez de $x = 2 u_L$.
3. É preferível orientar positivamente cada face. Tendo os vértices sido numerados de modo arbitrário, uma face qualquer é designada pelos números dos seus vértices, sendo estes números considerados do modo mais conveniente.
- Podemos então construir a tabela das faces.
4. O cálculo da imagem utilizará em cada caso uma simples perspectiva cavaleira.
- Proceder-se-á à eliminação das faces escondidas no caso do dodecaedro e no do icosaedro.

3 O tetraedro regular

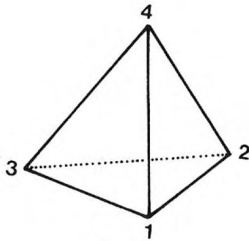


Fig. 1

1. Escolha do referencial
- A figura 1 mostra como se numeram os vértices.
- O é o centro da face 123, Oz passa pelo ponto 4, Ox passa pelo meio da aresta 1-2 e pelo ponto 3.

2. Tabela dos vértices

Número do vértice	x	y	z
1	1	$-\sqrt{3}$	0
2	1	$\sqrt{3}$	0
3	-2	0	0
4	0	0	$\sqrt{8}$

3. Tabela das faces

Número das faces	Designação
1	132
2	143
3	124
4	234

4. Programa e resultado

O programa é o seguinte:

```

10 INPUT "INDIQUE O VALOR DE U
L<45: ")U1
15 REM coordenadas dos vertice
3
20 DIM X(4)
30 DIM Y(4)
40 DIM Z(4)
50 DATA 1,-30R 3,0,1,50R 3,0,-
2,0,0,0,0,50R 8
60 DATA 1,3,2,1,2,4,1,4,3,3,4,
2
70 FOR i=1 TO 4
80 READ X,Y,Z
90 LET X(i)=X*U1
100 LET Y(i)=Y*U1
110 LET Z(i)=Z*U1
120 NEXT i
125 REM calculo da imagem
130 FOR i=1 TO 4
140 LET X(i)=INT (0.5+X(i)+0.37
S*Y(i))
150 LET Z(i)=INT (0.5+Z(i)+0.37
S*Y(i))

```

```

160 NEXT i
165 REM tracado
170 FOR i=1 TO 4
180 READ a,b,c
190 PLOT 120+X(a),40+Z(a)
200 DRAW X(b)-X(a),Z(b)-Z(a)
210 DRAW X(c)-X(b),Z(c)-Z(b)
220 DRAW X(a)-X(c),Z(a)-Z(c)
230 NEXT i

```

Para $u_1 = 40$, obtemos esta representação (figura 2), após rotação de 60° em torno do eixo Oz .

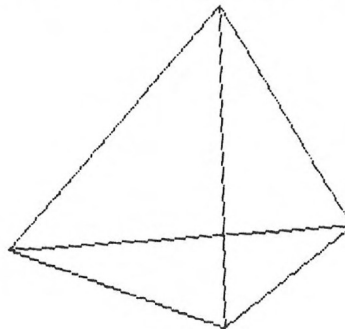


Fig. 2

4 O octaedro

1. Escolha do referencial

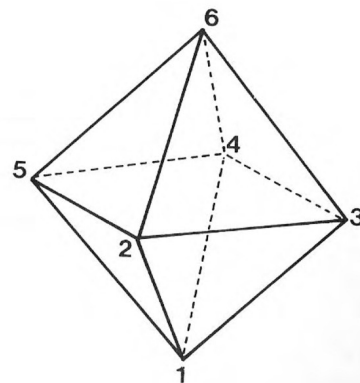


Fig. 3

Os vértices são numerados como se indica na figura 3. O está no centro do octaedro, Oz passa pelos pontos 1 e 6, Ox pelos pontos médios das arestas 4-5 e 2-3.

2. Tabela dos vértices

Número dos vértices	x	y	z
1	0	0	-1
2	0	-1	0
3	1	0	0
4	0	1	0
5	-1	0	0
6	0	0	1

3. Tabela das faces

Número das faces	Designação
1	132
2	143
3	125
4	154
5	236
6	265
7	346
8	564

4. Programa e resultado

```

5 REM dados
10 INPUT "INDIQUE O VALOR DE U
L<=80: ";U
20 DIM X(6)

```

```

30 DIM U(6)
40 DIM Z(6)
50 DIM N(6)
60 DIM T(6,6)
70 DIM A(6,6)
80 DIM B(6,6)
90 DIM C(6,6)
100 DIM D(6,6)
110 DIM E(6,6)
120 DIM F(6,6)
130 DIM G(6,6)
140 DIM H(6,6)
150 DIM I(6,6)
160 DIM J(6,6)
170 DIM K(6,6)
180 DIM L(6,6)
190 DIM M(6,6)
200 DIM N(6,6)
210 DIM O(6,6)
220 DIM P(6,6)
230 DIM Q(6,6)
240 DIM R(6,6)
250 DIM S(6,6)
260 DIM T(6,6)
270 DIM U(6,6)
280 DIM V(6,6)
290 DIM W(6,6)
300 DIM X(6,6)
310 DIM Y(6,6)
320 DIM Z(6,6)
330 DIM AA(6,6)
340 DIM BB(6,6)
350 DIM CC(6,6)
360 DIM DD(6,6)
370 DIM EE(6,6)
380 DIM FF(6,6)
390 DIM GG(6,6)
400 DIM HH(6,6)
410 DIM II(6,6)
420 DIM JJ(6,6)
430 DIM KK(6,6)
440 DIM LL(6,6)
450 DIM MM(6,6)
460 DIM NN(6,6)
470 DIM OO(6,6)
480 DIM PP(6,6)
490 DIM QQ(6,6)
500 DIM RR(6,6)
510 DIM SS(6,6)
520 DIM TT(6,6)
530 DIM UU(6,6)
540 DIM VV(6,6)
550 DIM WW(6,6)
560 DIM XX(6,6)
570 DIM YY(6,6)
580 DIM ZZ(6,6)
590 DIM AAA(6,6)
600 DIM BBB(6,6)
610 DIM CCC(6,6)
620 DIM DDD(6,6)
630 DIM EEE(6,6)
640 DIM FFF(6,6)
650 DIM GGG(6,6)
660 DIM HHH(6,6)
670 DIM III(6,6)
680 DIM JJJ(6,6)
690 DIM KKK(6,6)
700 DIM LLL(6,6)
710 DIM MMM(6,6)
720 DIM NNN(6,6)
730 DIM OOO(6,6)
740 DIM PPP(6,6)
750 DIM QQQ(6,6)
760 DIM RRR(6,6)
770 DIM SSS(6,6)
780 DIM TTT(6,6)
790 DIM UUU(6,6)
800 DIM VVV(6,6)
810 DIM WWW(6,6)
820 DIM XXX(6,6)
830 DIM YYY(6,6)
840 DIM ZZZ(6,6)
850 DIM AAAA(6,6)
860 DIM BBBB(6,6)
870 DIM CCCC(6,6)
880 DIM DDDD(6,6)
890 DIM EEEE(6,6)
900 DIM FFFF(6,6)
910 DIM GGGG(6,6)
920 DIM HHHH(6,6)
930 DIM IIII(6,6)
940 DIM JJJJ(6,6)
950 DIM KKKK(6,6)
960 DIM LLLL(6,6)
970 DIM MMMM(6,6)
980 DIM NNNN(6,6)
990 DIM OOOO(6,6)
1000 DIM PPPP(6,6)
1010 DIM QQQQ(6,6)
1020 DIM RRRR(6,6)
1030 DIM SSSS(6,6)
1040 DIM TTTT(6,6)
1050 DIM UUUU(6,6)
1060 DIM VVVV(6,6)
1070 DIM WWWW(6,6)
1080 DIM XXXX(6,6)
1090 DIM YYYYY(6,6)
1100 DIM ZZZZ(6,6)
1110 DIM AAAA(6,6)
1120 DIM BBBB(6,6)
1130 DIM CCCC(6,6)
1140 DIM DDDD(6,6)
1150 DIM EEEE(6,6)
1160 DIM FFFF(6,6)
1170 DIM GGGG(6,6)
1180 DIM HHHH(6,6)
1190 DIM IIII(6,6)
1200 DIM JJJJ(6,6)
1210 DIM KKKK(6,6)
1220 DIM LLLL(6,6)
1230 DIM MMMM(6,6)
1240 DIM NNNN(6,6)
1250 DIM OOOO(6,6)
1260 DIM PPPP(6,6)
1270 DIM QQQQ(6,6)
1280 DIM RRRR(6,6)
1290 DIM SSSS(6,6)
1300 DIM TTTT(6,6)
1310 DIM UUUU(6,6)
1320 DIM VVVV(6,6)
1330 DIM WWWW(6,6)
1340 DIM XXXX(6,6)
1350 DIM YYYYY(6,6)
1360 DIM ZZZZ(6,6)
1370 DIM AAAA(6,6)
1380 DIM BBBB(6,6)
1390 DIM CCCC(6,6)
1400 DIM DDDD(6,6)
1410 DIM EEEE(6,6)
1420 DIM FFFF(6,6)
1430 DIM GGGG(6,6)
1440 DIM HHHH(6,6)
1450 DIM IIII(6,6)
1460 DIM JJJJ(6,6)
1470 DIM KKKK(6,6)
1480 DIM LLLL(6,6)
1490 DIM MMMM(6,6)
1500 DIM NNNN(6,6)
1510 DIM OOOO(6,6)
1520 DIM PPPP(6,6)
1530 DIM QQQQ(6,6)
1540 DIM RRRR(6,6)
1550 DIM SSSS(6,6)
1560 DIM TTTT(6,6)
1570 DIM UUUU(6,6)
1580 DIM VVVV(6,6)
1590 DIM WWWW(6,6)
1600 DIM XXXX(6,6)
1610 DIM YYYYY(6,6)
1620 DIM ZZZZ(6,6)
1630 DIM AAAA(6,6)
1640 DIM BBBB(6,6)
1650 DIM CCCC(6,6)
1660 DIM DDDD(6,6)
1670 DIM EEEE(6,6)
1680 DIM FFFF(6,6)
1690 DIM GGGG(6,6)
1700 DIM HHHH(6,6)
1710 DIM IIII(6,6)
1720 DIM JJJJ(6,6)
1730 DIM KKKK(6,6)
1740 DIM LLLL(6,6)
1750 DIM MMMM(6,6)
1760 DIM NNNN(6,6)
1770 DIM OOOO(6,6)
1780 DIM PPPP(6,6)
1790 DIM QQQQ(6,6)
1800 DIM RRRR(6,6)
1810 DIM SSSS(6,6)
1820 DIM TTTT(6,6)
1830 DIM UUUU(6,6)
1840 DIM VVVV(6,6)
1850 DIM WWWW(6,6)
1860 DIM XXXX(6,6)
1870 DIM YYYYY(6,6)
1880 DIM ZZZZ(6,6)
1890 DIM AAAA(6,6)
1900 DIM BBBB(6,6)
1910 DIM CCCC(6,6)
1920 DIM DDDD(6,6)
1930 DIM EEEE(6,6)
1940 DIM FFFF(6,6)
1950 DIM GGGG(6,6)
1960 DIM HHHH(6,6)
1970 DIM IIII(6,6)
1980 DIM JJJJ(6,6)
1990 DIM KKKK(6,6)
2000 DIM LLLL(6,6)
2010 DIM MMMM(6,6)
2020 DIM NNNN(6,6)
2030 DIM OOOO(6,6)
2040 DIM PPPP(6,6)
2050 DIM QQQQ(6,6)
2060 DIM RRRR(6,6)
2070 DIM SSSS(6,6)
2080 DIM TTTT(6,6)
2090 DIM UUUU(6,6)
2100 DIM VVVV(6,6)
2110 DIM WWWW(6,6)
2120 DIM XXXX(6,6)
2130 DIM YYYYY(6,6)
2140 DIM ZZZZ(6,6)
2150 DIM AAAA(6,6)
2160 DIM BBBB(6,6)
2170 DIM CCCC(6,6)
2180 DIM DDDD(6,6)
2190 DIM EEEE(6,6)
2200 DIM FFFF(6,6)
2210 DIM GGGG(6,6)
2220 DIM HHHH(6,6)
2230 DIM IIII(6,6)
2240 DIM JJJJ(6,6)
2250 DIM KKKK(6,6)
2260 DIM LLLL(6,6)
2270 DIM MMMM(6,6)
2280 DIM NNNN(6,6)
2290 DIM OOOO(6,6)
2300 DIM PPPP(6,6)
2310 DIM QQQQ(6,6)
2320 DIM RRRR(6,6)
2330 DIM SSSS(6,6)
2340 DIM TTTT(6,6)
2350 DIM UUUU(6,6)
2360 DIM VVVV(6,6)
2370 DIM WWWW(6,6)
2380 DIM XXXX(6,6)
2390 DIM YYYYY(6,6)
2400 DIM ZZZZ(6,6)
2410 DIM AAAA(6,6)
2420 DIM BBBB(6,6)
2430 DIM CCCC(6,6)
2440 DIM DDDD(6,6)
2450 DIM EEEE(6,6)
2460 DIM FFFF(6,6)
2470 DIM GGGG(6,6)
2480 DIM HHHH(6,6)
2490 DIM IIII(6,6)
2500 DIM JJJJ(6,6)
2510 DIM KKKK(6,6)
2520 DIM LLLL(6,6)
2530 DIM MMMM(6,6)
2540 DIM NNNN(6,6)
2550 DIM OOOO(6,6)
2560 DIM PPPP(6,6)
2570 DIM QQQQ(6,6)
2580 DIM RRRR(6,6)
2590 DIM SSSS(6,6)
2600 DIM TTTT(6,6)
2610 DIM UUUU(6,6)
2620 DIM VVVV(6,6)
2630 DIM WWWW(6,6)
2640 DIM XXXX(6,6)
2650 DIM YYYYY(6,6)
2660 DIM ZZZZ(6,6)
2670 DIM AAAA(6,6)
2680 DIM BBBB(6,6)
2690 DIM CCCC(6,6)
2700 DIM DDDD(6,6)
2710 DIM EEEE(6,6)
2720 DIM FFFF(6,6)
2730 DIM GGGG(6,6)
2740 DIM HHHH(6,6)
2750 DIM IIII(6,6)
2760 DIM JJJJ(6,6)
2770 DIM KKKK(6,6)
2780 DIM LLLL(6,6)
2790 DIM MMMM(6,6)
2800 DIM NNNN(6,6)
2810 DIM OOOO(6,6)
2820 DIM PPPP(6,6)
2830 DIM QQQQ(6,6)
2840 DIM RRRR(6,6)
2850 DIM SSSS(6,6)
2860 DIM TTTT(6,6)
2870 DIM UUUU(6,6)
2880 DIM VVVV(6,6)
2890 DIM WWWW(6,6)
2900 DIM XXXX(6,6)
2910 DIM YYYYY(6,6)
2920 DIM ZZZZ(6,6)
2930 DIM AAAA(6,6)
2940 DIM BBBB(6,6)
2950 DIM CCCC(6,6)
2960 DIM DDDD(6,6)
2970 DIM EEEE(6,6)
2980 DIM FFFF(6,6)
2990 DIM GGGG(6,6)
3000 DIM HHHH(6,6)
3010 DIM IIII(6,6)
3020 DIM JJJJ(6,6)
3030 DIM KKKK(6,6)
3040 DIM LLLL(6,6)
3050 DIM MMMM(6,6)
3060 DIM NNNN(6,6)
3070 DIM OOOO(6,6)
3080 DIM PPPP(6,6)
3090 DIM QQQQ(6,6)
3100 DIM RRRR(6,6)
3110 DIM SSSS(6,6)
3120 DIM TTTT(6,6)
3130 DIM UUUU(6,6)
3140 DIM VVVV(6,6)
3150 DIM WWWW(6,6)
3160 DIM XXXX(6,6)
3170 DIM YYYYY(6,6)
3180 DIM ZZZZ(6,6)
3190 DIM AAAA(6,6)
3200 DIM BBBB(6,6)
3210 DIM CCCC(6,6)
3220 DIM DDDD(6,6)
3230 DIM EEEE(6,6)
3240 DIM FFFF(6,6)
3250 DIM GGGG(6,6)
3260 DIM HHHH(6,6)
3270 DIM IIII(6,6)
3280 DIM JJJJ(6,6)
3290 DIM KKKK(6,6)
3300 DIM LLLL(6,6)
3310 DIM MMMM(6,6)
3320 DIM NNNN(6,6)
3330 DIM OOOO(6,6)
3340 DIM PPPP(6,6)
3350 DIM QQQQ(6,6)
3360 DIM RRRR(6,6)
3370 DIM SSSS(6,6)
3380 DIM TTTT(6,6)
3390 DIM UUUU(6,6)
3400 DIM VVVV(6,6)
3410 DIM WWWW(6,6)
3420 DIM XXXX(6,6)
3430 DIM YYYYY(6,6)
3440 DIM ZZZZ(6,6)
3450 DIM AAAA(6,6)
3460 DIM BBBB(6,6)
3470 DIM CCCC(6,6)
3480 DIM DDDD(6,6)
3490 DIM EEEE(6,6)
3500 DIM FFFF(6,6)
3510 DIM GGGG(6,6)
3520 DIM HHHH(6,6)
3530 DIM IIII(6,6)
3540 DIM JJJJ(6,6)
3550 DIM KKKK(6,6)
3560 DIM LLLL(6,6)
3570 DIM MMMM(6,6)
3580 DIM NNNN(6,6)
3590 DIM OOOO(6,6)
3600 DIM PPPP(6,6)
3610 DIM QQQQ(6,6)
3620 DIM RRRR(6,6)
3630 DIM SSSS(6,6)
3640 DIM TTTT(6,6)
3650 DIM UUUU(6,6)
3660 DIM VVVV(6,6)
3670 DIM WWWW(6,6)
3680 DIM XXXX(6,6)
3690 DIM YYYYY(6,6)
3700 DIM ZZZZ(6,6)
3710 DIM AAAA(6,6)
3720 DIM BBBB(6,6)
3730 DIM CCCC(6,6)
3740 DIM DDDD(6,6)
3750 DIM EEEE(6,6)
3760 DIM FFFF(6,6)
3770 DIM GGGG(6,6)
3780 DIM HHHH(6,6)
3790 DIM IIII(6,6)
3800 DIM JJJJ(6,6)
3810 DIM KKKK(6,6)
3820 DIM LLLL(6,6)
3830 DIM MMMM(6,6)
3840 DIM NNNN(6,6)
3850 DIM OOOO(6,6)
3860 DIM PPPP(6,6)
3870 DIM QQQQ(6,6)
3880 DIM RRRR(6,6)
3890 DIM SSSS(6,6)
3900 DIM TTTT(6,6)
3910 DIM UUUU(6,6)
3920 DIM VVVV(6,6)
3930 DIM WWWW(6,6)
3940 DIM XXXX(6,6)
3950 DIM YYYYY(6,6)
3960 DIM ZZZZ(6,6)
3970 DIM AAAA(6,6)
3980 DIM BBBB(6,6)
3990 DIM CCCC(6,6)
4000 DIM DDDD(6,6)
4010 DIM EEEE(6,6)
4020 DIM FFFF(6,6)
4030 DIM GGGG(6,6)
4040 DIM HHHH(6,6)
4050 DIM IIII(6,6)
4060 DIM JJJJ(6,6)
4070 DIM KKKK(6,6)
4080 DIM LLLL(6,6)
4090 DIM MMMM(6,6)
4100 DIM NNNN(6,6)
4110 DIM OOOO(6,6)
4120 DIM PPPP(6,6)
4130 DIM QQQQ(6,6)
4140 DIM RRRR(6,6)
4150 DIM SSSS(6,6)
4160 DIM TTTT(6,6)
4170 DIM UUUU(6,6)
4180 DIM VVVV(6,6)
4190 DIM WWWW(6,6)
4200 DIM XXXX(6,6)
4210 DIM YYYYY(6,6)
4220 DIM ZZZZ(6,6)
4230 DIM AAAA(6,6)
4240 DIM BBBB(6,6)
4250 DIM CCCC(6,6)
4260 DIM DDDD(6,6)
4270 DIM EEEE(6,6)
4280 DIM FFFF(6,6)
4290 DIM GGGG(6,6)
4300 DIM HHHH(6,6)
4310 DIM IIII(6,6)
4320 DIM JJJJ(6,6)
4330 DIM KKKK(6,6)
4340 DIM LLLL(6,6)
4350 DIM MMMM(6,6)
4360 DIM NNNN(6,6)
4370 DIM OOOO(6,6)
4380 DIM PPPP(6,6)
4390 DIM QQQQ(6,6)
4400 DIM RRRR(6,6)
4410 DIM SSSS(6,6)
4420 DIM TTTT(6,6)
4430 DIM UUUU(6,6)
4440 DIM VVVV(6,6)
4450 DIM WWWW(6,6)
4460 DIM XXXX(6,6)
4470 DIM YYYYY(6,6)
4480 DIM ZZZZ(6,6)
4490 DIM AAAA(6,6)
4500 DIM BBBB(6,6)
4510 DIM CCCC(6,6)
4520 DIM DDDD(6,6)
4530 DIM EEEE(6,6)
4540 DIM FFFF(6,6)
4550 DIM GGGG(6,6)
4560 DIM HHHH(6,6)
4570 DIM IIII(6,6)
4580 DIM JJJJ(6,6)
4590 DIM KKKK(6,6)
4600 DIM LLLL(6,6)
4610 DIM MMMM(6,6)
4620 DIM NNNN(6,6)
4630 DIM OOOO(6,6)
4640 DIM PPPP(6,6)
4650 DIM QQQQ(6,6)
4660 DIM RRRR(6,6)
4670 DIM SSSS(6,6)
4680 DIM TTTT(6,6)
4690 DIM UUUU(6,6)
4700 DIM VVVV(6,6)
4710 DIM WWWW(6,6)
4720 DIM XXXX(6,6)
4730 DIM YYYYY(6,6)
4740 DIM ZZZZ(6,6)
4750 DIM AAAA(6,6)
4760 DIM BBBB(6,6)
4770 DIM CCCC(6,6)
4780 DIM DDDD(6,6)
4790 DIM EEEE(6,6)
4800 DIM FFFF(6,6)
4810 DIM GGGG(6,6)
4820 DIM HHHH(6,6)
4830 DIM IIII(6,6)
4840 DIM JJJJ(6,6)
4850 DIM KKKK(6,6)
4860 DIM LLLL(6,6)
4870 DIM MMMM(6,6)
4880 DIM NNNN(6,6)
4890 DIM OOOO(6,6)
4900 DIM PPPP(6,6)
4910 DIM QQQQ(6,6)
4920 DIM RRRR(6,6)
4930 DIM SSSS(6,6)
4940 DIM TTTT(6,6)
4950 DIM UUUU(6,6)
4960 DIM VVVV(6,6)
4970 DIM WWWW(6,6)
4980 DIM XXXX(6,6)
4990 DIM YYYYY(6,6)
5000 DIM ZZZZ(6,6)
5010 DIM AAAA(6,6)
5020 DIM BBBB(6,6)
5030 DIM CCCC(6,6)
5040 DIM DDDD(6,6)
5050 DIM EEEE(6,6)
5060 DIM FFFF(6,6)
5070 DIM GGGG(6,6)
5080 DIM HHHH(6,6)
5090 DIM IIII(6,6)
5100 DIM JJJJ(6,6)
5110 DIM KKKK(6,6)
5120 DIM LLLL(6,6)
5130 DIM MMMM(6,6)
5140 DIM NNNN(6,6)
5150 DIM OOOO(6,6)
5160 DIM PPPP(6,6)
5170 DIM QQQQ(6,6)
5180 DIM RRRR(6,6)
5190 DIM SSSS(6,6)
5200 DIM TTTT(6,6)
5210 DIM UUUU(6,6)
5220 DIM VVVV(6,6)
5230 DIM WWWW(6,6)
5240 DIM XXXX(6,6)
5250 DIM YYYYY(6,6)
5260 DIM ZZZZ(6,6)
5270 DIM AAAA(6,6)
5280 DIM BBBB(6,6)
5290 DIM CCCC(6,6)
5300 DIM DDDD(6,6)
5310 DIM EEEE(6,6)
5320 DIM FFFF(6,6)
5330 DIM GGGG(6,6)
5340 DIM HHHH(6,6)
5350 DIM IIII(6,6)
5360 DIM JJJJ(6,6)
5370 DIM KKKK(6,6)
5380 DIM LLLL(6,6)
5390 DIM MMMM(6,6)
5400 DIM NNNN(6,6)
5410 DIM OOOO(6,6)
5420 DIM PPPP(6,6)
5430 DIM QQQQ(6,6)
5440 DIM RRRR(6,6)
5450 DIM SSSS(6,6)
5460 DIM TTTT(6,6)
5470 DIM UUUU(6,6)
5480 DIM VVVV(6,6)
5490 DIM WWWW(6,6)
5500 DIM XXXX(6,6)
5510 DIM YYYYY(6,6)
5520 DIM ZZZZ(6,6)
5530 DIM AAAA(6,6)
5540 DIM BBBB(6,6)
5550 DIM CCCC(6,6)
5560 DIM DDDD(6,6)
5570 DIM EEEE(6,6)
5580 DIM FFFF(6,6)
5590 DIM GGGG(6,6)
5600 DIM HHHH(6,6)
5610 DIM IIII(6,6)
5620 DIM JJJJ(6,6)
5630 DIM KKKK(6,6)
5640 DIM LLLL(6,6)
5650 DIM MMMM(6,6)
5660 DIM NNNN(6,6)
5670 DIM OOOO(6,6)
5680 DIM PPPP(6,6)
5690 DIM QQQQ(6,6)
5700 DIM RRRR(6,6)
5710 DIM SSSS(6,6)
5720 DIM TTTT(6,6)
5730 DIM UUUU(6,6)
5740 DIM VVVV(6,6)
5750 DIM WWWW(6,6)
5760 DIM XXXX(6,6)
5770 DIM YYYYY(6,6)
5780 DIM ZZZZ(6,6)
5790 DIM AAAA(6,6)
5800 DIM BBBB(6,6)
5810 DIM CCCC(6,6)
5820 DIM DDDD(6,6)
5830 DIM EEEE(6,6)
5840 DIM FFFF(6,6)
5850 DIM GGGG(6,6)
5860 DIM HHHH(6,6)
5870 DIM IIII(6,6)
5880 DIM JJJJ(6,6)
5890 DIM KKKK(6,6)
5900 DIM LLLL(6,6)
5910 DIM MMMM(6,6)
5920 DIM NNNN(6,6)
5930 DIM OOOO(6,6)
5940 DIM PPPP(6,6)
5950 DIM QQQQ(6,6)
5960 DIM RRRR(6,6)
5970 DIM SSSS(6,6)
5980 DIM TTTT(6,6)
5990 DIM UUUU(6,6)
6000 DIM VVVV(6,6)
6010 DIM WWWW(6,6)
6020 DIM XXXX(6,6)
6030 DIM YYYYY(6,6)
6040 DIM ZZZZ(6,6)
6050 DIM AAAA(6,6)
6060 DIM BBBB(6,6)
6070 DIM CCCC(6,6)
6080 DIM DDDD(6,6)
6090 DIM EEEE(6,6)
6100 DIM FFFF(6,6)
6110 DIM GGGG(6,6)
6120 DIM HHHH(6,6)
6130 DIM IIII(6,6)
6140 DIM JJJJ(6,6)
6150 DIM KKKK(6,6)
6160 DIM LLLL(6,6)
6170 DIM MMMM(6,6)
6180 DIM NNNN(6,6)
6190 DIM OOOO(6,6)
6200 DIM PPPP(6,6)
6210 DIM QQQQ(6,6)
6220 DIM RRRR(6,6)
6230 DIM SSSS(6,6)
6240 DIM TTTT(6,6)
6250 DIM UUUU(6,6)
6260 DIM VVVV(6,6)
6270 DIM WWWW(6,6)
6280 DIM XXXX(6,6)
6290 DIM YYYYY(6,6)
6300 DIM ZZZZ(6,6)
6310 DIM AAAA(6,6)
6320 DIM BBBB(6,6)
6330 DIM CCCC(6,6)
6340 DIM DDDD(6,6)
6350 DIM EEEE(6,6)
6360 DIM FFFF(6,6)
6370 DIM GGGG(6,6)
6380 DIM HHHH(6,6)
6390 DIM IIII(6,6)
6400 DIM JJJJ(6,6)
6410 DIM KKKK(6,6)
6420 DIM LLLL(6,6)
6430 DIM MMMM(6,6)
6440 DIM NNNN(6,6)
6450 DIM OOOO(6,6)
6460 DIM PPPP(6,6)
6470 DIM QQQQ(6,6)
6480 DIM RRRR(6,6)
6490 DIM SSSS(6,6)
6500 DIM TTTT(6,6)
6510 DIM UUUU(6,6)
6520 DIM VVVV(6,6)
6530 DIM WWWW(6,6)
6540 DIM XXXX(6,6)
6550 DIM YYYYY(6,6)
6560 DIM ZZZZ(6,6)
6570 DIM AAAA(6,6)
6580 DIM BBBB(6,6)
6590 DIM CCCC(6,6)
6600 DIM DDDD(6,6)
6610 DIM EEEE(6,6)
6620 DIM FFFF(6,6)
6630 DIM GGGG(6,6)
6640 DIM HHHH(6,6)
6650 DIM IIII(6,6)
6660 DIM JJJJ(6,6)
6670 DIM KKKK(6,6)
6680 DIM LLLL(6,6)
6690 DIM MMMM(6,6)
6700 DIM NNNN(6,6)
6710 DIM OOOO(6,6)
6720 DIM PPPP(6,6)
6730 DIM QQQQ(6,6)
6740 DIM RRRR(6,6)
6750 DIM SSSS(6,6)
6760 DIM TTTT(6,6)
6770 DIM UUUU(6,6)
6780 DIM VVVV(6,6)
6790 DIM WWWW(6,6)
6800 DIM XXXX(6,6)
6810 DIM YYYYY(6,6)
6820 DIM ZZZZ(6,6)
6830 DIM AAAA(6,6)
6840 DIM BBBB(6,6)
6850 DIM CCCC(6,6)
6860 DIM DDDD(6,6)
6870 DIM EEEE(6,6)
6880 DIM FFFF(6,6)
6890 DIM GGGG(6,6)
6900 DIM HHHH(6,6)
6910 DIM IIII(6,6)
6920 DIM JJJJ(6,6)
6930 DIM KKKK(6,6)
6940 DIM LLLL(6,6)
6950 DIM MMMM(6,6)
6960 DIM NNNN(6,6)
6970 DIM OOOO(6,6)
6980 DIM PPPP(6,6)
6990 DIM QQQQ(6,6)
7000 DIM RRRR(6,6)
7010 DIM SSSS(6,6)
7020 DIM TTTT(6,6)
7030 DIM UUUU(6,6)
7040 DIM VVVV(6,6)
7050 DIM WWWW(6,6)
7060 DIM XXXX(6,6)
7070 DIM YYYYY(6,6)
7080 DIM ZZZZ(6,6)
7090 DIM AAAA(6,6)
7100 DIM BBBB(6,6)
7110 DIM CCCC(6,6)
7120 DIM DDDD(6,6)
7130 DIM EEEE(6,6)
7140 DIM FFFF(6,6)
7150 DIM GGGG(6,6)
7160 DIM HHHH(6,6)
7170 DIM IIII(6,6)
7180 DIM JJJJ(6,6)
7190 DIM KKKK(6,6)
7200 DIM LLLL(6,6)
7210 DIM MMMM(6,6)
7220 DIM NNNN(6,6)
7230 DIM OOOO(6,6)
7240 DIM PPPP(6,6)
7250 DIM QQQQ(6,6)
7260 DIM RRRR(6,6)
7270 DIM SSSS(6,6)
7280 DIM TTTT(6,6)
7290 DIM UUUU(6,6)
7300 DIM VVVV(6,6)
7310 DIM WWWW(6,6)
7320 DIM XXXX(6,6)
7330 DIM YYYYY(6,6)
7340 DIM ZZZZ(6,6)
7350 DIM AAAA(6,6)
7360 DIM BBBB(6,6)
7370 DIM CCCC(6,6)
7380 DIM DDDD(6,6)
7390 DIM EEEE(6,6)
7400 DIM FFFF(6,6)
7410 DIM GGGG(6,6)
7420 DIM HHHH(6,6)
7430 DIM IIII(6,6)
7440 DIM JJJJ(6,6)
7450 DIM KKKK(6,6)
7460 DIM LLLL(6,6)
7470 DIM MMMM(6,6)
7480 DIM NNNN(6,6)
7490 DIM OOOO(6,6)
7500 DIM PPPP(6,6)
7510 DIM QQQQ(6,6)
7520 DIM RRRR(6,6)
7530 DIM SSSS(6,6)
7540 DIM TTTT(6,6)
7550 DIM UUUU(6,6)
7560 DIM VVVV(6,6)
7570 DIM WWWW(6,6)
7580 DIM XXXX(6,6)
7590 DIM YYYYY(6,6)
7600 DIM ZZZZ(6,6)
7610 DIM AAAA(6,6)
7620 DIM BBBB(6,6)
7630 DIM CCCC(6,6)
7640 DIM DDDD(6,6)
7650 DIM EEEE(6,6)
7660 DIM FFFF(6,6)
7670 DIM GGGG(6,6)
7680 DIM HHHH(6,6)
7690 DIM IIII(6,6)
7700 DIM JJJJ(6,6)
7710 DIM KKKK(6,6)
7720 DIM LLLL(6,6)
7730 DIM MMMM(6,6)
7740 DIM NNNN(6,6)
7750 DIM OOOO(6,6)
7760 DIM PPPP(6,6)
7770 DIM QQQQ(6,6)
7780 DIM RRRR(6,6)
7790 DIM SSSS(6,6)
7800 DIM TTTT(6,6)
7810 DIM UUUU(6,6)
7820 DIM VVVV(6,6)
7830 DIM WWWW(6,6)
7840 DIM XXXX(6,6)
7850 DIM YYYYY(6,6)
7860 DIM ZZZZ(6,6)
7870 DIM AAAA(6,6)
7880 DIM BBBB(6,6)
7890 DIM CCCC(6,6)
7900 DIM DDDD(6,6)
7910 DIM EEEE(6,6)
7920 DIM FFFF(6,6)
7930 DIM GGGG(6,6)
7940 DIM HHHH(6,6)
7950 DIM IIII(6,6)
7960 DIM JJJJ(6,6)
7970 DIM KKKK(6,6)
7980 DIM LLLL(6,6)
7990 DIM MMMM(6,6)
8000 DIM NNNN(6,6)
8010 DIM OOOO(6,6)
8020 DIM PPPP(6,6)
8030 DIM QQQQ(6,6)
8040 DIM RRRR(6,6)
8050 DIM SSSS(6,6)
8060 DIM TTTT(6,6)
8070 DIM UUUU(6,6)
8080 DIM VVVV(6,6)
8090 DIM WWWW(6,6)
8100 DIM XXXX(6,6)
8110 DIM YYYYY(6,6)
8120 DIM ZZZZ(6,6)
8130 DIM AAAA(6,6)
8140 DIM BBBB(6,6)
8150 DIM CCCC(6,6)
8160 DIM DDDD(6,6)
8170 DIM EEEE(6,6)
8180 DIM FFFF(6,6)
8190 DIM GGGG(6,6)
8200 DIM HHHH(6,6)
8210 DIM IIII(6,6)
8220 DIM JJJJ(6,6)
8230 DIM KKKK(6,6)
8240 DIM LLLL(6,6)
8250 DIM MMMM(6,6)
8260 DIM NNNN(6,6)
8270 DIM OOOO(6,6)
8280 DIM PPPP(6,6)
8290 DIM QQQQ(6,6)
8300 DIM RRRR(6,6)
8310 DIM SSSS(6,6)
8320 DIM TTTT(6,6)
8330 DIM UUUU(6,6)
8340 DIM VVVV(6,6)
8350 DIM WWWW(6,6)
8360 DIM XXXX(6,6)
8370 DIM YYYYY(6,6)
8380 DIM ZZZZ(6,6)
8390 DIM AAAA(6,6)
8400 DIM BBBB(6,6)
8410 DIM CCCC(6,6)
8420 DIM DDDD(6,6)
8430 DIM EEEE(6,6)
8440 DIM FFFF(6,6)
8450 DIM GGGG(6,6)
8460 DIM HHHH(6,6)
8470 DIM IIII(6,6)
8480 DIM JJJJ(6,6)
8490 DIM KKKK(6,6)
8500 DIM LLLL(6,6)
8510 DIM MMMM(6,6)
8520 DIM NNNN(6,6)
8530 DIM OOOO(6,6)
8540 DIM PPPP(6,6)
8550 DIM QQQQ(6,6)
8560 DIM RRRR(6,6)
8570 DIM SSSS(6,6)
8580 DIM TTTT(6,6)
8590 DIM UUUU(6,6)
8600 DIM VVVV(6,6)
8610 DIM WWWW(6,6)
8620 DIM XXXX(6,6)
8630 DIM YYYYY(6,6)
8640 DIM ZZZZ(6,6)
8650 DIM AAAA(6,6)
8660 DIM BBBB(6,6)
8670 DIM CCCC(6,6)
8680 DIM DDDD(6,6)
8690 DIM EEEE(6,6)
8700 DIM FFFF(6,6)
8710 DIM GGGG(6,6)
8720 DIM HHHH(6,6)
8730 DIM IIII(6,6)
8740 DIM JJJJ(6,6)
8750 DIM KKKK(6,6)
8760 DIM LLLL(6,6)
8770 DIM MMMM(6,
```

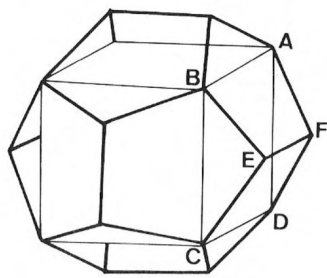


Fig. 5

1. Escolha do referencial

Consideramos um cubo inscrito no dodecaedro (figura 5): teremos O no centro do cubo, e portanto do dodecaedro, e os eixos Ox, Oy e Oz passam cada um pelo centro de uma face do cubo.

As dimensões do poliedro ABCDEF da figura 5 dependem do número de ouro $t = \frac{\sqrt{5} + 1}{2}$ e do comprimento c do lado do dodecaedro.

Por exemplo, $AB = ct$. Pode assim exprimir-se as coordenadas dos 20 vértices do dodecaedro em função deste número t (os cálculos são relativamente fastidiosos).

Os números escolhidos para os vértices são indicados na figura 6.

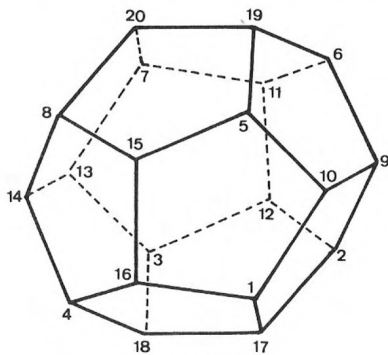


Fig. 6

2. Tabela dos vértices

Número dos vértices	x	y	z
1	t	-t	-t
2	t	t	-t
3	-t	t	-t
4	-t	-t	-t
5	t	-t	t
6	t	t	t
7	-t	t	t
8	-t	-t	t
9	1+t	1	0
10	1+t	-1	0
11	0	1+t	1
12	0	1+t	-1
13	-1-t	1	0
14	-1-t	-1	0
15	0	-1-t	1
16	0	-1-t	-1
17	1	0	-1-t
18	-1	0	-1-t
19	1	0	1+t
20	-1	0	1+t

3. Tabela das faces

Número das faces	Designação				
1	11	6	9	2	12
2	19	5	10	9	6
3	19	6	11	7	20
4	8	15	5	19	20
5	4	16	15	8	14
6	16	1	10	5	15
7	16	4	18	17	1
8	12	2	17	18	3
9	17	2	9	10	1
10	20	7	13	14	8
11	14	13	3	18	4
12	11	12	3	13	7

4. Programa

Antes de procedermos ao traçado, poderemos rodar o dodecaedro em torno do eixo Oz (linhas 150 a 230). Seria fácil acrescentar rotações em torno dos eixos Ox e Oy.

As linhas 320 e 330 permitem eliminar as partes escondidas (ver o capítulo 8). Basta suprimir estas duas linhas para ver todas as faces.

```

5 REM coordenadas dos vinte v
vertices
10 LET ul=30
20 LET t=(1+50R 5)/2
30 LET u=1+t
40 DATA t,-t,-t,t,t,-t,-t,t,-t
,-t,-t,-t,t,t,t,t,-t,t,t,-t
,-t,t,(1,0,0,-1,0,0,1,0,0,-1,
,-1,0,-1,0,0,-1,0,0,-1,1,1,
0,-1,-1,0,-1,0,1,0,t,-1,0,t
5000 DIM x(20)
5000 DIM y(20)
5000 DIM z(20)
5000 FOR i=1 TO 20
5000 READ x,y,z
5000 LET x(i)=x*ul
5000 LET y(i)=y*ul
5000 LET z(i)=z*ul
5000 NEXT i
5000 REM rotacao em torno do eix
6102
5000 INPUT "QUAL E' O ANGULO DE
ROTACAO (EM GRAUS)? ",ar
5000 LET c=COS (ar*PI/180)
5000 LET s=SIN (ar*PI/180)
5000 FOR i=1 TO 20
5000 LET u=x(i)*c-y(i)*s
5000 LET v=x(i)*s+y(i)*c
5000 LET x(i)=u
5000 LET y(i)=v
5000 NEXT i
5000 REM calculo da perspectiva
5000 FOR i=1 TO 20
5000 LET x(i)=INT (.5+x(i)+.353*
y(i))
5000 LET z(i)=INT (.5+z(i)+0.07*
y(i))
5000 NEXT i
5000 REM tabeja das faces
5000 DATA 11,0,0,10,0,0,10,0,
0,0,11,7,0,0,0,0,0,10,0,
0,0,0,14,0,0,10,0,0,0,0,4,0,
0,0,0,17,0,0,0,1,0,0,0,0,7,
0,0,4,0,0,4,0,0,0,4,0,0,0,0,
0,0,4,0,0,4,0,0,0,4,0,0,0,0
7

```

```

2000 REM tracado
3000 FOR i=1 TO 12
310 READ a,b,c,d,e
320 LET p=(z(b)-z(a))*(x(c)-x(a)
)-(z(c)-z(a))*(x(b)-x(a))
330 IF p>0 THEN GO TO 400
340 PLOT 128+x(a),88+z(a)
350 DRAW x(b)-x(a),z(b)-z(a)
360 DRAW x(c)-x(b),z(c)-z(b)
370 DRAW x(d)-x(c),z(d)-z(c)
380 DRAW x(e)-x(d),z(e)-z(d)
390 DRAW x(a)-x(e),z(a)-z(e)
400 NEXT i

```

5. Resultados

As figuras 7 e 8 representam o dodecaedro na sua posição inicial sem eliminação das partes escondidas e com eliminação destas.

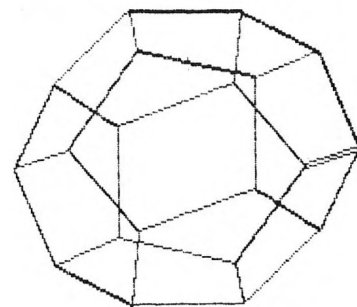


Fig. 7

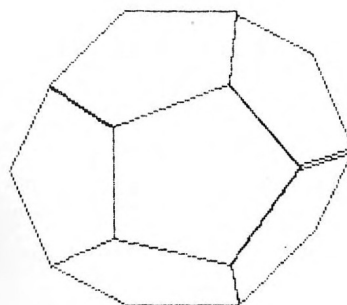


Fig. 8

As figuras 9 e 10 representam o dodecaedro após rotação de 80° e de 90° em torno do eixo Oz.

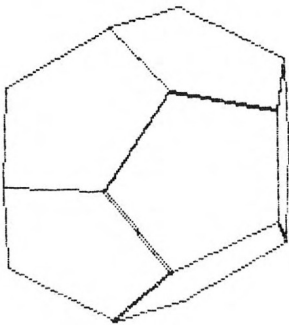


Fig. 9

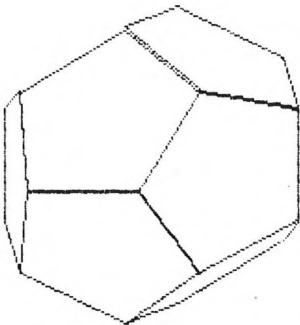


Fig. 10

6 O icosaedro

Para construir um icosaedro, utilizaremos um resultado descoberto no Renascimento e relacionado com as propriedades dos rectângulos de ouro.

Um rectângulo de ouro possui a seguinte propriedade: o quociente do comprimento pela largura é o número de ouro

$$t = \frac{\sqrt{5} + 1}{2}$$

1. Tabela dos vértices

Juntando três rectângulos de ouro do modo indicado na figura 11 e ligando os vértices dois a dois, obtém-se um icosaedro.

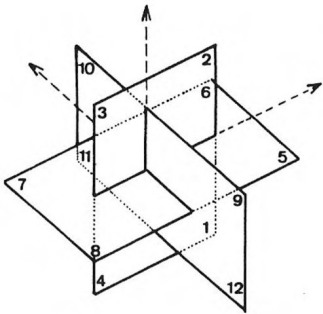


Fig. 11

As coordenadas dos doze vértices deste icosaedro calculam-se facilmente.

Número dos vértices	x	y	z
1	1	0	-t
2	1	0	t
3	-1	0	t
4	-1	0	-t
5	t	-1	0
6	t	1	0
7	-t	1	0
8	-t	-1	0
9	0	-t	1
10	0	t	1
11	0	t	-1
12	0	-t	-1

2. Tabela das faces

Número das faces	Designação
1	2 10 3
2	10 2 6
3	10 6 11
4	7 10 11
5	7 3 10
6	8 9 3
7	2 3 9
8	2 9 5
9	6 2 5
10	6 5 1
11	6 1 11
12	11 1 4
13	7 11 4
14	8 7 4
15	8 3 7
16	12 5 9
17	1 5 12
18	1 12 4
19	4 12 8
20	8 12 9

3. Programa

```

5 REM coordenadas dos doze ve
rtices
10 LET U=50
20 LET t=(1+50R 5)/2
30 LET l=t
40 DATA 1,0,l,1,0,t,-1,0,t,-1,
0,l,t,-1,0,t,1,0,l,1,0,t,-1,0,0,
l,1,0,t,1,0,t,-1,0,l,-1
50 DIM x(10)
60 DIM u(10)
70 DIM z(10)
80 FOR i=1 TO 12
90 READ x,u,z
100 LET x(i)=x*U
110 LET u(i)=u*U
120 LET z(i)=z*U
130 NEXT i

```

```

140 REM rotacao em torno do eix
o 02
150 INPUT "QUAL E' O ANGULO DE
ROTACAO (EM GRAUS)? ";ar
160 LET c=COS (ar*PI/180)
170 LET s=SIN (ar*PI/180)
180 FOR i=1 TO 12
190 LET v=x(i)*c-y(i)*s
200 LET w=x(i)*s+y(i)*c
210 LET x(i)=v
220 LET y(i)=w
230 NEXT i
235 REM calculo da perspectiva
240 FOR i=1 TO 12
250 LET x(i)=INT (0.5+x(i)+0.47
*y(i))
260 LET z(i)=INT (0.5+z(i)+0.17
1*y(i))
270 NEXT i
275 REM tabela das faces
280 DATA 2,10,3,10,2,6,10,6,11,
7,10,11,7,3,10,8,9,3,2,3,9,8,9,5
,6,2,5,6,5,1,6,1,11,11,1,4,7,11,
4,8,7,4,8,3,7,12,5,9,1,5,12,1,12
,4,4,12,8,8,12,9
290 REM traceado
300 FOR i=1 TO 20
310 READ a,b,c
320 LET p=(z(b)-z(a))*(x(c)-x(a)
)-(z(c)-z(a))*(x(b)-x(a))
330 IF p>0 THEN GO TO 380
340 PLOT 120+x(a),80+z(a)
350 DRAW x(b)-x(a),z(b)-z(a)
360 DRAW x(c)-x(b),z(c)-z(b)
370 DRAW x(a)-x(c),z(a)-z(c)
380 NEXT i

```

As figuras 12 e 13 representam o mesmo icosaedro, na posição inicial, com e sem eliminação das partes escondidas.

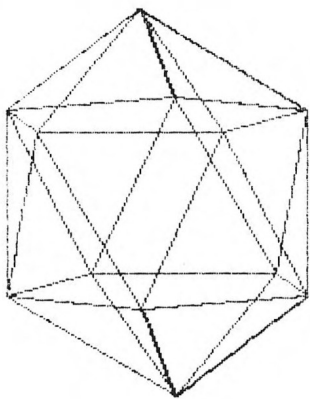


Fig. 12

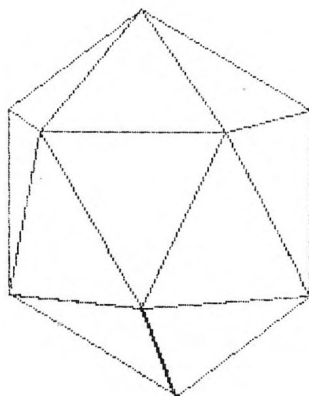


Fig. 13

OS POLIEDROS CONVEXOS SEMI-REGULARES

A figura 1, extraída dos cadernos de Leonardo da Vinci, mostra dois poliedros semi-regulares.

Estes poliedros possuem quase todas as propriedades dos poliedros regulares:

- Podem ser inscritos numa esfera;
- Todas as arestas têm o mesmo comprimento;
- As suas faces estão dispostas de modo idêntico em torno de cada um dos vértices.

A diferença reside no seguinte: as faces de um poliedro semi-regular não são todas idênticas.

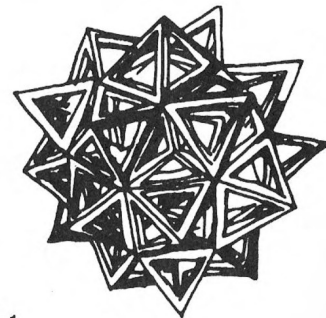
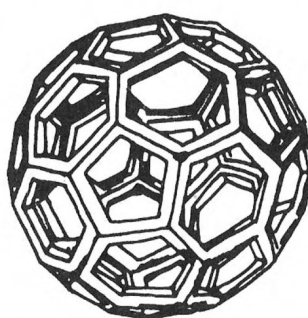


Fig. 1

1 Os sólidos de Arquimedes

São em número de quinze. Entre eles, sete obtêm-se a partir dos poliedros regulares, por truncatura dos vértices.

Todos estes poliedros são convexos.

1. Truncando os quatro vértices de um tetraedro regular, obtém-se um tetraedro truncado.

A partir de um cubo ou de um octaedro regular obtêm-se um cubo truncado, um cuboctaedro e um octaedro truncado.

A partir de um dodecaedro ou de um icosaedro obtêm-se um dodecaedro truncado, um icosidodecaedro e um icosaedro truncado.

A tabela que se segue indica as características destes sete poliedros. Nesta tabela, as letras T, C, P, H, O e D designam respectivamente os polígonos regulares de 3, 4, 5, 6, 8 e 10 lados.

Nome	Número dos vértices	Número das arestas	Natureza e número das faces
Tetraedro truncado	12	18	4 T + 4 H
Cubo truncado	24	36	8 T + 6 O
Cuboctaedro	12	24	8 T + 6 C
Octaedro truncado	24	36	6 C + 8 H
Dodecaedro truncado	60	90	20 T + 12 D
Icosidodecaedro	30	60	20 T + 12 P
Icosaedro truncado	60	90	12 P + 20 H

2. O leitor poderá encontrar uma descrição dos outros sólidos de Arquimedes na obra de Alan Holden, *Formas, espaço e simetrias*.

2 Primeiro exemplo: o octaedro truncado

1. Os vértices deste poliedro são numerados de 1 a 24 como se indica na figura 2 (os vértices 9, 10, 11, 12, 13, 19 estão escondidos no desenho).

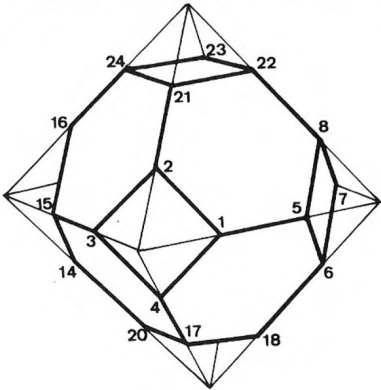


Fig. 2

O referencial Oxyz é idêntico ao que foi usado no caso do octaedro (ver o capítulo 9, parágrafo 4).

2. Tabela dos vértices

Se u_L designa a unidade de comprimento, as coordenadas x , y e z de cada vértice podem escrever-se $x = k_x u_L$, $y = k_y u_L$ e $z = k_z u_L$. Na tabela que se segue figuram portanto apenas k_x , k_y e k_z .

Número do vértice	x	y	z
1	3	-1	0
2	2	-2	$\sqrt{2}$
3	1	-3	0
4	2	-2	$-\sqrt{2}$
5	3	1	0
6	2	2	$-\sqrt{2}$
7	1	3	0
8	2	2	$\sqrt{2}$
9	-1	3	0
10	-2	2	$-\sqrt{2}$
11	-3	1	0
12	-2	2	$\sqrt{2}$
13	-3	-1	0
14	-2	-2	$-\sqrt{2}$
15	-1	-3	0
16	-2	-2	$\sqrt{2}$
17	1	-1	$-2\sqrt{2}$
18	1	1	$-2\sqrt{2}$
19	-1	1	$-2\sqrt{2}$
20	-1	-1	$-2\sqrt{2}$
21	1	-1	$2\sqrt{2}$
22	1	1	$2\sqrt{2}$
23	-1	1	$2\sqrt{2}$
24	-1	-1	$2\sqrt{2}$

3. Tabela das faces

As faces são orientadas positivamente de modo a permitir a eliminação das partes escondidas.

Como existem dois tipos de faces, haverá duas tabelas:

Faces quadradas	Designações
1	1 2 3 4
2	5 6 7 8
3	9 10 11 12
4	13 14 15 16
5	17 20 19 18
6	21 22 23 24

Faces hexagonais	Designações
1	1 5 8 22 21 2
2	1 4 17 18 6 5
3	16 15 3 2 21 24
4	15 14 20 17 4 3
5	13 16 24 23 12 11
6	11 10 19 20 14 13
7	9 7 6 18 19 10
8	23 22 8 7 9 12

4. Programa

```

5 REM coordenadas dos vertice
10 LET U(1)=20
20 DIM X(24)
30 DIM U(24)
40 DIM Z(24)

```

```

1000 LET I=600
1000 DATA 1,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13,14,15,16,17,18,19,20,21,22,23,24
1000 FOR I=1 TO 24
1000 READ X(I),Y(I),Z(I)
1000 NEXT I
1000 REM calculo da perspectiva
1000 FOR I=1 TO 24
1000 LET X(I)=X(I)+0.45*Y(I)
1000 LET Z(I)=Z(I)+0.00*Y(I)
1000 NEXT I
1000 REM desenho das faces quadr
1000 DATA 1,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13,14,15,16,17,18,19,20,21,22,23,24
1000 FOR I=1 TO 6
1000 READ a,b,c,d
1000 LET p=(Z(b)-Z(a))*(X(c)-X(a))-(Z(c)-Z(a))*(X(b)-X(a))
1000 IF p>0 THEN GO TO 270
1000 PLOT 100+X(a),80+Z(a)
1000 DRAW X(b)-X(a),Z(b)-Z(a)
1000 DRAW X(c)-X(b),Z(c)-Z(b)
1000 DRAW X(d)-X(c),Z(d)-Z(c)
1000 DRAW X(a)-X(d),Z(a)-Z(d)
1000 NEXT I
1000 REM desenho das faces hexag
1000 DATA 1,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13,14,15,16,17,18,19,20,21,22,23,24
1000 FOR I=1 TO 8
1000 READ a,b,c,d,e,f
1000 LET p=(Z(b)-Z(a))*(X(c)-X(a))-(Z(c)-Z(a))*(X(b)-X(a))
1000 IF p>0 THEN GO TO 400
1000 PLOT 100+X(a),80+Z(a)
1000 DRAW X(b)-X(a),Z(b)-Z(a)
1000 DRAW X(c)-X(b),Z(c)-Z(b)
1000 DRAW X(d)-X(c),Z(d)-Z(c)
1000 DRAW X(e)-X(d),Z(e)-Z(d)
1000 DRAW X(f)-X(e),Z(f)-Z(e)
1000 DRAW X(a)-X(f),Z(a)-Z(f)
1000 NEXT I

```

5. As figuras 3 e 4 mostram-nos o octaedro truncado em perspectiva cavaleira. Para obter a totalidade das arestas, eliminámos as linhas 220 e 330 do programa.

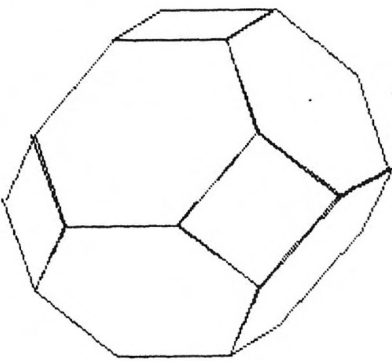


Fig. 3

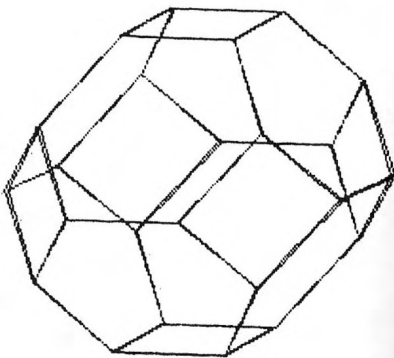


Fig. 4

3 Segundo exemplo: o cuboctaedro

1. Os vértices deste poliedro são os pontos médios das arestas do cubo.

A figura 5 indica o referencial escolhido assim como os números atribuídos a cada vértice.

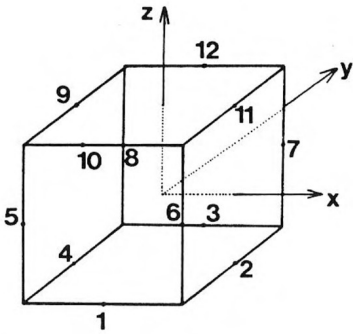


Fig. 5

2. Tabela dos vértices

Número dos vértices	x	y	z
1	0	-1	-1
2	1	0	-1
3	0	1	-1
4	-1	0	-1
5	-1	-1	0
6	1	-1	0
7	1	1	0
8	-1	1	0
9	-1	0	1
10	0	-1	1
11	1	0	1
12	0	1	1

3. Tabelas das faces

Faces quadradas	Designações
1	9 10 11 12
2	1 4 3 2
3	2 7 11 6
4	5 9 8 4
5	1 6 10 5
6	12 7 3 8

Faces triangulares	Designações
1	10 9 5
2	10 6 11
3	11 7 12
4	9 12 8
5	1 5 4
6	1 2 6
7	3 7 2
8	4 8 3

4. Programa

```

5 REM coordenadas dos vertice
10 LET U1=70
20 DIM X(12)
30 DIM Y(12)
40 DIM Z(12)
50 DATA 0,-1,-1,1,0,-1,0,1,-1,
-1,0,-1,-1,-1,0,1,-1,0,1,1,0,-1,
1,0,-1,0,1,0,-1,1,1,0,1,0,1,1
60 FOR I=1 TO 12
70 READ X(I),Y(I),Z(I)
80 NEXT I
90 LET X(I)=X(I)*U1
100 LET Y(I)=Y(I)*U1
110 LET Z(I)=Z(I)*U1
120 NEXT I
130 REM calculo da perspectiva
140 FOR I=1 TO 12
150 LET X(I)=X(I)+0.375*Y(I)
160 LET Z(I)=Z(I)+0.375*Y(I)
170 NEXT I

```

```

165 REM desenho das faces
170 DATA 9,10,11,12,1,4,3,2,2,7,
11,6,9,9,8,4,1,0,10,9,12,7,3,8
180 FOR I=1 TO 8
190 READ A,B,C,D
200 LET P=(Z(B)-Z(A))*(X(C)-X(A))
- (Z(C)-Z(A))*(X(B)-X(A))
210 IF P>0 THEN GO TO 270
220 PLOT 128+X(A),88+Z(A)
230 DRAW X(B)-X(A),Z(B)-Z(A)
240 DRAW X(C)-X(B),Z(C)-Z(B)
250 DRAW X(D)-X(C),Z(D)-Z(C)
260 DRAW X(A)-X(D),Z(A)-Z(D)
270 NEXT I
275 REM desenho das faces trian-
gulares
280 DATA 10,9,5,10,6,11,11,7,12,
9,12,8,1,5,4,1,2,6,3,7,2,4,8,3
290 FOR I=1 TO 8
300 READ A,B,C
310 LET P=(Z(B)-Z(A))*(X(C)-X(A))
- (Z(C)-Z(A))*(X(B)-X(A))
320 IF P>0 THEN GO TO 370
330 PLOT 128+X(A),88+Z(A)
340 DRAW X(B)-X(A),Z(B)-Z(A)
350 DRAW X(C)-X(B),Z(C)-Z(B)
360 DRAW X(A)-X(C),Z(A)-Z(C)
370 NEXT I

```

5. A figura 6 apresenta, em perspectiva cavaleira, um cuboctaedro cujas partes escondidas foram eliminadas.

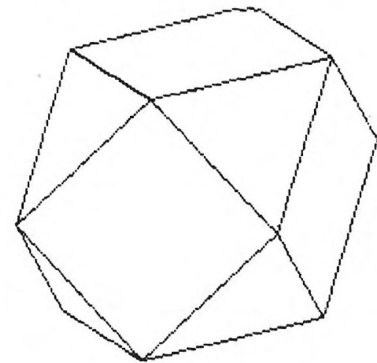


Fig. 6

4 Prismas e antiprismas de Kepler

No início do século XVII, Kepler descobriu dois novos tipos de poliedros que satisfazem a definição dos poliedros semi-regulares:

- os prismas rectos cujas faces laterais são quadrados;
- os antiprismas cujas faces laterais são triângulos equiláteros.

As figuras 7 e 8 apresentam um exemplo do prisma de Kepler, de bases hexagonais.

A figura 9 representa um antiprisma de Kepler, igualmente de bases hexagonais.

Este antiprisma foi obtido graças ao programa do parágrafo 4.3.

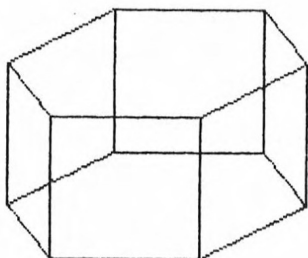


Fig. 7

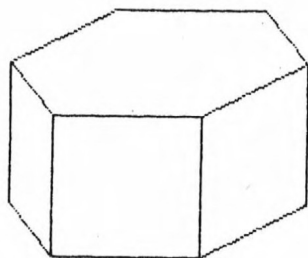


Fig. 8

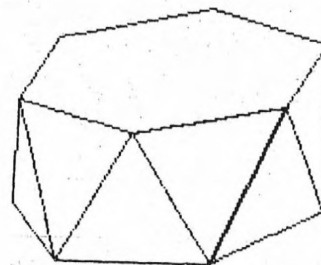


Fig. 9

1. A figura 10 mostra como os doze vértices foram numerados e como foi escolhido o referencial Oxyz.

As coordenadas destes vértices foram calculadas graças à representação paramétrica do círculo $x = R \cos t$ e $y = R \sin t$.

A altura h deste prisma é

$$h = R \sqrt{1 - 4 \sin^2 \frac{\pi}{16}}$$

ou seja,

$$h = R \times 0,9207383$$

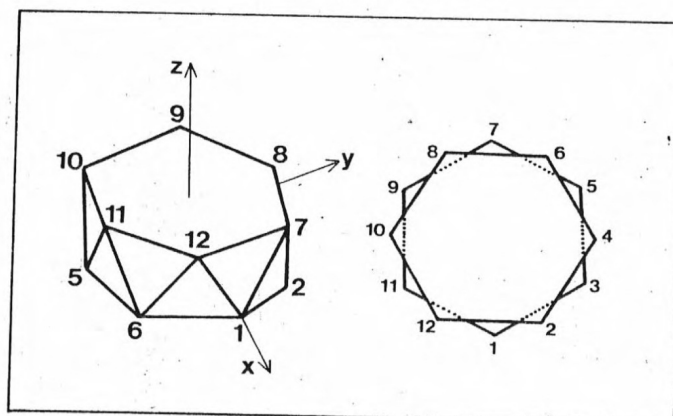


Fig. 10

2. A tabela das faces triangulares é a seguinte:

Número da face	Designações
1	2 7 1
2	7 2 8
3	3 8 2
4	8 3 9
5	4 9 3
6	9 4 10
7	5 10 4
8	10 5 11
9	6 11 5
10	11 6 12
11	1 12 6
12	12 1 7

3. Programa

```

5 REM dados
10 INPUT "VALOR DO RAIOS? "; r
20 LET h=r*0.9207383
30 DIM x(12)
40 DIM y(12)
50 DIM z(12)
60 FOR i=1 TO 6
70 LET x(i)=r*COS ((i-1)*PI/3)
80 LET y(i)=r*SIN ((i-1)*PI/3)
90 LET z(i)=0
100 LET x(i+6)=r*COS ((2*i-1)*PI/6)
110 LET y(i+6)=r*SIN ((2*i-1)*PI/6)
120 LET z(i+6)=h
130 NEXT i
135 REM calculo da perspectiva
140 FOR i=1 TO 12
150 LET x(i)=x(i)+0.25*y(i)
160 LET z(i)=z(i)+0.433*y(i)
170 NEXT i
175 REM desenho das faces hexag
08ais
180 LET p=(z(3)-z(1))*(x(2)-x(3))-(z(2)-z(3))*(x(3)-x(1))
190 IF p>0 THEN GO TO 250
200 PLOT 128+x(1),50+y(1)
210 FOR i=2 TO 6

```

```

220 DRAW x(i)-x(i-1),z(i)-z(i-1)
230 NEXT i
240 DRAW x(1)-x(6),z(1)-z(6)
250 LET p=(z(8)-z(7))*(x(9)-x(7))-(z(9)-z(7))*(x(8)-x(7))
260 IF p>0 THEN GO TO 320
270 PLOT 128+x(7),50+z(7)
275 REM desenho das faces triangulares
280 FOR i=7 TO 11
290 DRAW x(i+1)-x(i),z(i+1)-z(i)
300 NEXT i
310 DRAW x(7)-x(12),z(7)-z(12)
315 REM desenho das faces triangulares
320 DATA 2,7,1,7,2,8,3,8,2,8,3,
3,4,9,3,9,4,10,5,10,4,10,5,11,6,
11,6,11,6,12,1,12,6,12,1,7
330 FOR i=1 TO 12
340 READ a,b,c
350 LET p=(z(b)-z(a))*(x(c)-x(a))-(z(c)-z(a))*(x(b)-x(a))
360 IF p>0 THEN GO TO 410
370 PLOT 128+x(a),50+z(a)
380 DRAW x(b)-x(a),z(b)-z(a)
390 DRAW x(c)-x(b),z(c)-z(b)
400 DRAW x(a)-x(c),z(a)-z(c)
410 NEXT i

```

AS SUPERFÍCIES DEFINIDAS POR UMA EQUAÇÃO $Z = F(X, Y)$

Seja f uma função numérica de duas variáveis x e y . Supomos que, para $x_{\min} \leq x \leq x_{\max}$ e $y_{\min} \leq y \leq y_{\max}$ a função f é definida e contínua.

Consideremos $z = f(x, y)$. O espaço é organizado por um referencial Oxyz, sendo os números x , y e z as coordenadas de um ponto.

O conjunto dos pontos assim definido constitui uma superfície cuja equação é $z = f(x, y)$.

Neste capítulo, estudaremos dois programas que permitem representar uma tal superfície, não incluindo o primeiro uma eliminação das partes escondidas. O segundo permite eliminar estas partes, e utiliza o algoritmo de Wright.

1 Princípio geral da representação

Dividamos o intervalo $[x_{\min}, x_{\max}]$ em n_x partes iguais.

Para $1 \leq i \leq 1 + n_x$ teremos $x_i = x_{\min} + (i - 1) \left(\frac{x_{\max} - x_{\min}}{n_x} \right)$.

Dividamos agora o intervalo $[y_{\min}, y_{\max}]$ em n_y partes iguais.

Para $1 \leq j \leq 1 + n_y$, teremos então $y_j = y_{\min} + (j - 1) \left(\frac{y_{\max} - y_{\min}}{n_y} \right)$.

Define-se assim uma rede rectangular formada por $n_x + 1$ linhas paralelas ao eixo Oy e $n_y + 1$ linhas paralelas ao eixo Ox (ver a figura 1).

Em cada ponto (x_i, y_j) da rede, calcula-se $z(i, j) = f(x_i, y_j)$: obtêm-se então os pontos P (i, j) (ver a figura 2).

Basta em seguida juntar os pontos obtidos por segmentos de recta a fim de obter uma aproximação suficientemente grande da superfície a representar (ver a figura 3).

O emprego de uma perspectiva, cavaleira ou cónica, permite em seguida visualizar esta superfície no visor.

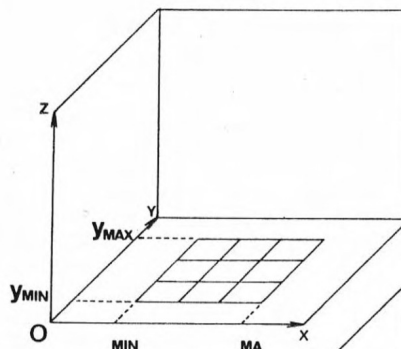


Fig. 1

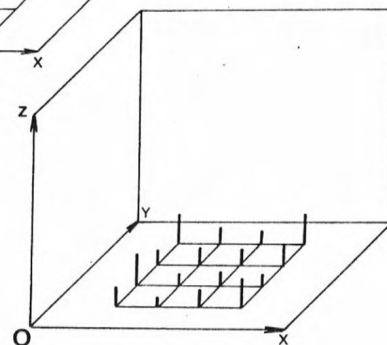


Fig. 2

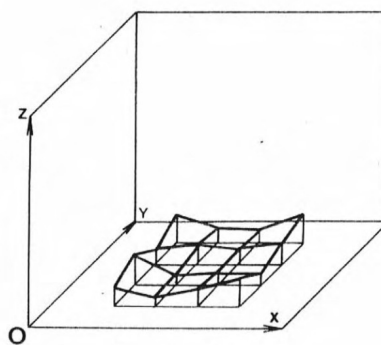


Fig. 3

2 Primeiro programa

Este programa engloba seis partes.

1. Primeira parte

A função f deve antes do mais ser definida na linha 10.

Apresentam-se em seguida os diferentes parâmetros x_{\min} , x_{\max} , y_{\min} , y_{\max} , n_x e n_y necessários à execução do programa:

```
10 DEF FN Z(X,Y)=.....
20 INPUT XMIN
30 INPUT XMAX
40 INPUT YMIN
50 INPUT YMAX
60 INPUT NX
70 INPUT NY
```

2. Segunda parte

Calculam-se os valores de x_i e de y_i para $1 \leq i \leq n_x + 1$ e $1 \leq j \leq n_y + 1$.

```
80 DIM X(NX+1)
90 DIM Y(NY+1)
100 FOR I=1 TO 1+NX
110 LET X(I)=XMIN+(I-1)*(XMAX-XMIN)/NX
120 NEXT I
130 FOR J=1 TO 1+NY
140 LET Y(J)=YMIN+(J-1)*(YMAX-YMIN)/NY
150 NEXT J
```

3. Terceira parte

Para cada ponto (x_i, y_j) da rede, calcula-se $z(i, j) = f(x_i, y_j)$.

```
160 DIM Z(1+NX,1+NY)
170 FOR I=1 TO 1+NX
180 FOR J=1 TO 1+NY
190 LET Z(I,J)=FN Z(X(I),Y(J))
200 NEXT J
210 NEXT I
```

4. Quarta parte

O ponto de coordenadas $x_i, y_j, z(i, j)$ é representado, no plano de projecção, pelo ponto de coordenadas $u(i, j)$ e $v(i, j)$.

A perspectiva empregue é uma perspectiva cavaleira.

Durante os cálculos, determinaremos os valores máximos e mínimos das coordenadas u e v .

```
220 DIM U(1+NX,1+NY)
230 DIM V(1+NX,1+NY)
240 LET UMAX=-10E30
250 LET VMAX=-10E30
260 LET UMIN=10E30
270 LET VMIN=10E30
280 FOR I=1 TO 1+NX
290 FOR J=1 TO 1+NY
300 LET U(I,J)=X(I)+0.375*Y(J)
310 LET V(I,J)=Z(I,J)+0.375*Y(J)
320 IF U(I,J)<UMIN THEN LET UMI
N=U(I,J)
330 IF V(I,J)<VMIN THEN LET VMI
N=V(I,J)
340 IF U(I,J)>UMAX THEN LET UMA
X=U(I,J)
350 IF V(I,J)>VMAX THEN LET VMA
X=V(I,J)
360 NEXT J
370 NEXT I
```

5. Quinta parte

Procedemos ao enquadramento da imagem utilizando o método número 1 do capítulo 3.

```
380 LET K1=253/(UMAX-UMIN)
390 LET K2=173/(VMAX-VMIN)
400 LET L1=254-K1*UMAX
410 LET L2=174-K2*VMAX
420 FOR I=1 TO NX+1
430 FOR J=1 TO NY+1
440 LET U(I,J)=K1*U(I,J)+L1
450 LET V(I,J)=K2*V(I,J)+L2
460 NEXT J
470 NEXT I
```

6. Sexta parte

Traçamos os segmentos que ligam os pontos $u(i, j)$, $v(i, j)$ ao ponto $u(i+1, j)$, $v(i+1, j)$ e ao ponto $u(i, j+1)$, $v(i, j+1)$.


```

4000 FOR I=1 TO 1+NX
4010 FOR J=1 TO 1+NY
4020 IF I=NX THEN PLOT U(I,J),V
4030 DRAW U(I+1,J)-U(I,J),V(I+
4040 J)-V(J)
4050 IF J=NY THEN PLOT U(I,J),V
4060 DRAW U(I,J+1)-U(I,J),V(I+
4070 J)-V(J)
4080 NEXT J
4090 NEXT I

```

3 Exemplos

1.º A figura 4 representa uma parabolóide elíptica de equação

$$z = 2x^2 + y^2$$

Escolhemos $x_{\min} = y_{\min} = -4$, $x_{\max} = y_{\max} = 4$ e $n_x = n_y = 16$.

2.º A figura 5 representa uma parabolóide hiperbólica de equação $z = x^2 - y^2$. Os parâmetros escolhidos têm o mesmo valor que anteriormente.

3.º Na figura 6 é representada uma parte da esfera

$$z = \sqrt{1000 - (x^2 + y^2)}$$

com $x_{\min} = y_{\min} = -20$, $x_{\max} = y_{\max} = 20$.

4.º A figura 7 mostra uma parte do plano $z = x + y$.

5.º Finalmente, a figura 8 representa a superfície de equação

$$z = x^2 y^2$$

com $-1 \leq x \leq 1$, $-1 \leq y \leq 1$, $n_x = n_y = 12$.

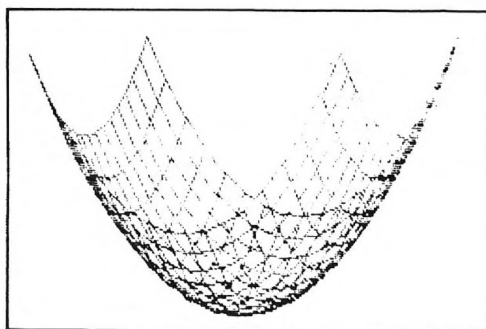


Fig. 4

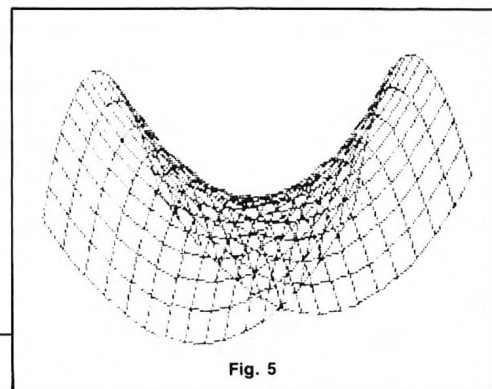


Fig. 5

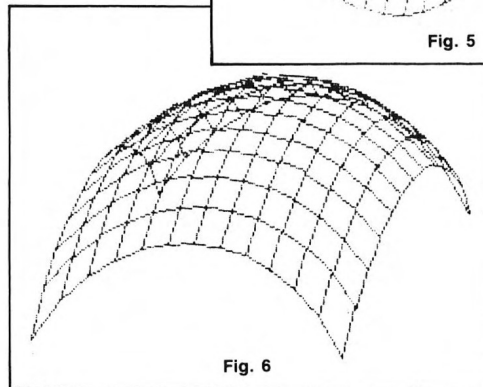


Fig. 6

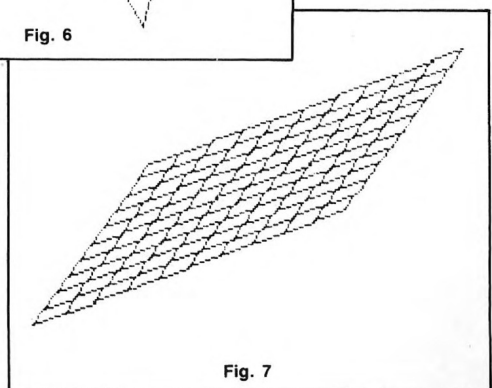


Fig. 7

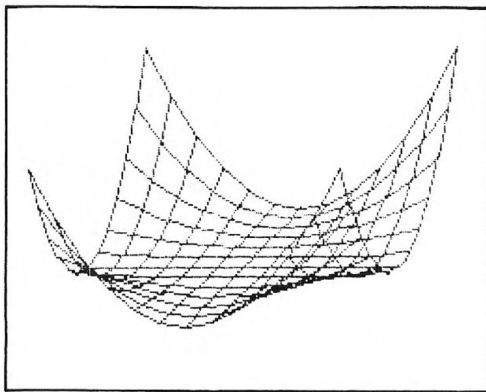


Fig. 8

4 Eliminação das partes escondidas

1. Definições

Comparemos as figuras 9 e 10: trata-se da mesma superfície mas, na figura 9, certas partes ditas escondidas foram eliminadas.

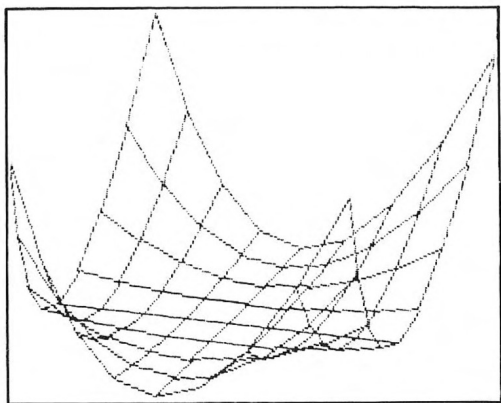


Fig. 9

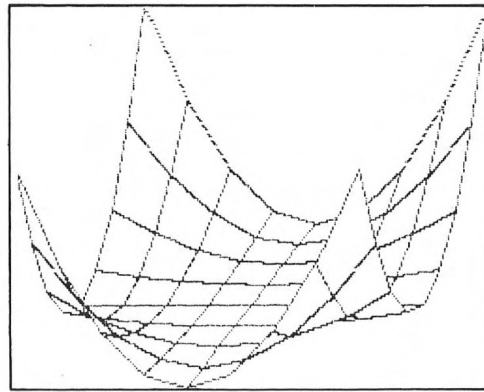


Fig. 10

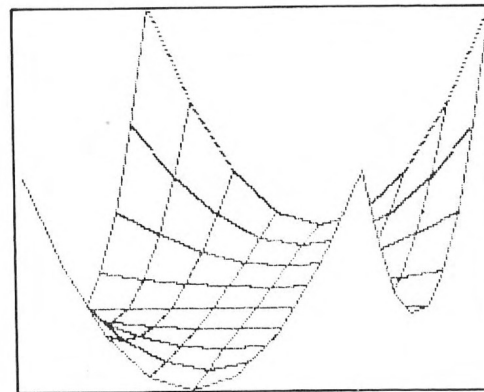


Fig. 11

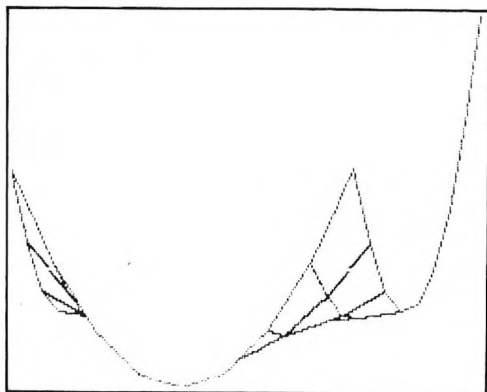


Fig. 12

Para um observador colocado sobre o eixo $y'y$ e olhando o plano xOz , a superfície apresenta uma parte inferior (figura 11) e uma parte superior (figura 12) definidas respectivamente em relação a uma linha de «crista» inicial suposta sempre visível (figura 13).

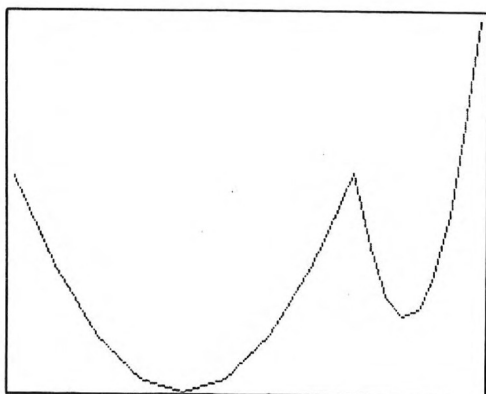


Fig. 13

2. Linha de crista inicial

O método do capítulo 3 (parágrafo 3.2) permite-nos inscrever a imagem da superfície a representar S num rectângulo de 254 pixels de largura.

A cada ponto $P(i, j)$ de S é então associado um ponto $M(i, j)$ deste rectângulo.

A linha de crista inicial é constituída por duas linhas distintas:

1.º Para $j = 1$ e $1 \leq i \leq n_x + 1$, traçam-se os segmentos que ligam os pontos $M(i, j)$ dois a dois.

2.º Para $i = n_x + 1$ e $1 \leq j \leq n_y + 1$, traçam-se os segmentos que ligam os pontos $M(i, j)$ dois a dois.

3. Linhas de crista máximas e mínimas

Consideremos primeiramente o caso do desenho da parte superior da superfície S .

Em cada etapa da construção é necessário definir uma linha de crista máxima. Apenas são visíveis, entre os pontos que falta desenhar, aqueles que se situam acima desta linha.

Seja x o número de um pixel qualquer: teremos portanto $1 \leq x \leq 254$. Notaremos $k(x)$, ordenada do ponto da linha de crista que corresponde a esta abscissa.

Do mesmo modo, o desenho da parte inferior da superfície S obriga à definição, em cada etapa, de uma linha de crista mínima.

4. Princípio do traçado

Depois de desenhada a linha de crista inicial, deverão ser traçados os segmentos que compõem as outras linhas em função da sua visibilidade.

Em cada etapa da construção, serão traçados dois segmentos se forem visíveis (na totalidade ou em parte): o segmento $M(i-1, j)$ $M(i, j)$ e o segmento $M(i-1, j-1)$ $M(i-1, j)$. Define-se em seguida a linha de crista.

Designemos por AB o segmento a traçar na etapa em curso e chamemos x_A, y_A e x_B, y_B as coordenadas respectivas de A e B .

Suponhamos $x_A < x_B$. Para x variando entre x_A e $x_B - 1$ com valores inteiros, designemos por T_1 e T_2 os pontos do segmento AB de abscissas respectivas x e $x + 1$.

As ordenadas y_1 e y_2 destes pontos serão calculadas usando a fórmula

$$y = y_A + (x - x_A) \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$

O caso em que se teria $x_A = x_B$ é muito improvável. Se ocorresse, bastaria alterar os valores de n_x ou de n_y .

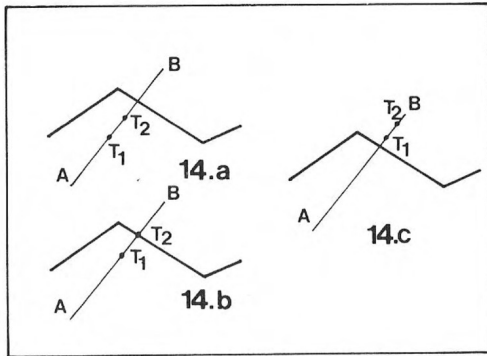


Fig. 14

Podem ocorrer três casos:

- 1.º T_1 e T_2 não são visíveis (figura 14a). O segmento $T_1 T_2$ não é desenhado.
- 2.º Só T_2 é visível (figura 14b). O segmento $T_1 T_2$ não é desenhado.
- 3.º T_1 e T_2 são visíveis (figura 14c). O segmento $T_1 T_2$ é desenhado.

5 Segundo programa

Este programa engloba três partes.

1. Primeira parte

Até à linha 470, esta parte é idêntica à do programa anterior.

2. Segunda parte

Constrói-se a parte superior da superfície.

- 1.º Linhas 480 a 580: definição da linha de crista inicial.

```

480 DIM h(254)
490 FOR i=2 TO nx+1
500 FOR x=u(i-1,1) TO u(i,1)
510 LET h(x)=INT (0.5+v(i-1,1)+(
(x-u(i-1,1))*(v(i,1)-v(i-1,1))/
(u(i,1)-u(i-1,1)))
520 NEXT x
530 NEXT i
540 FOR j=2 TO ny+1
550 FOR x=u(nx+1,j-1) TO u(nx+1,
j)
560 LET h(x)=INT (0.5+v(nx+1,j-
1)+(x-u(nx+1,j-1))*(v(nx+1,j)-v(
nx+1,j-1))/(u(nx+1,j)-u(nx+1,j-
1)))
570 NEXT x
580 NEXT j

```

- 2.º Linhas 590 a 620: traçado da linha de crista inicial.

```

590 PLOT 1,h(1)
600 FOR x=1 TO 253
610 DRAW 1,h(x+1)-h(x)
620 NEXT x

```

- 3.º Linhas 630 a 730: traçado dos dois segmentos $M(i-1, j)$ $M(i, j)$ e $M(i-1, j-1)$ $M(i-1, j)$.

```

760 FOR i=2 TO nx+1
770 FOR x=u(i-1,j) TO u(i,j)
780 LET yt=v(i-1,j)+(x-u(i-1,j)
)*(v(i,j)-v(i-1,j))/(u(i,j)-u(i-
1,j))
790 IF yt>h(x) THEN LET h(x)=yt
800 NEXT x
810 NEXT i
820 NEXT j

```

- 4.º Linhas 740 a 820: cálculo da nova linha de crista máxima.

```

830 FOR j=2 TO ny+1
840 FOR i=2 TO nx+1
850 FOR x=u(i-1,j) TO u(i,j)-1
860 LET y1=INT (0.5+v(i-1,j)+(x
-u(i-1,j))*(v(i,j)-v(i-1,j))/(u(
i,j)-u(i-1,j)))

```

```

670 LET y2=INT (0.5+v(i-1,j)+(x
+1-u(i-1,j))*(v(i,j)-v(i-1,j))/(
u(i,j)-u(i-1,j)))
680 IF y1>=h(x) AND y2>=h(x+1)
THEN PLOT x,y1: DRAW 1,y2-y1
690 NEXT x
700 FOR x=u(i-1,j-1) TO u(i-1,j
)-1
710 LET y1=INT (0.5+v(i-1,j-1)+
(x-u(i-1,j-1))*(v(i-1,j)-v(i-1,j
-1))/(u(i-1,j)-u(i-1,j-1)))
720 LET y2=INT (0.5+v(i-1,j-1)+
(x+1-u(i-1,j-1))*(v(i-1,j)-v(i-1
,j-1))/(u(i-1,j)-u(i-1,j-1)))
730 IF y1>=h(x) AND y2>=h(x+1)
THEN PLOT x,y1: DRAW 1,y2-y1
740 NEXT x
750 NEXT i

```

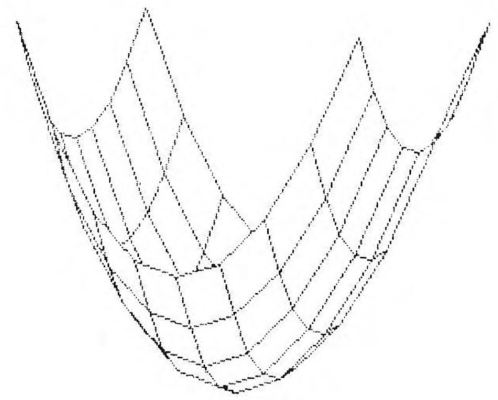


Fig. 15

3. Terceira parte

Constrói-se a parte inferior da superfície.

Esta parte retoma as linhas 490 a 820 com três exceções:

- Linhas 680 e 730: substituem-se os \geq por \leq .
- Linha 790: substitui-se $>$ por $<$.

6 Exemplos

As figuras 15, 16 e 17 representam respectivamente as superfícies de equações:

$$z = 2x^2 + y^2$$

$$z = \frac{1}{1+x^2+y^2}$$

$$z = xy + \frac{1}{10+y^2}$$

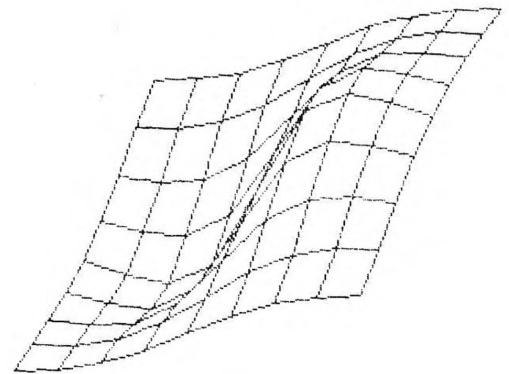


Fig. 16

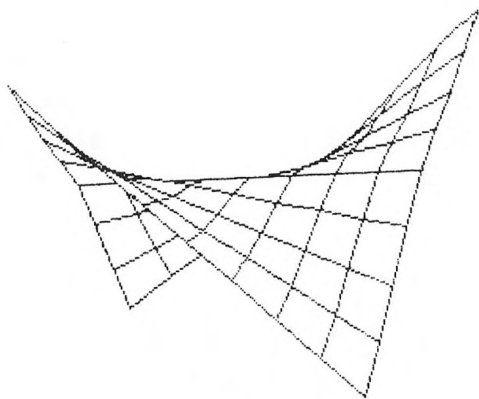


Fig. 17

Em todos os casos escolheu-se $n_x = n_y = 8$ a fim de limitar o tempo de cálculo a uma vintena de minutos.

Seja C uma curva contida no plano xOz . Rodando em torno do eixo Oz , a curva C produz uma superfície de revolução S .

Para construir esta superfície S , pode recorrer-se a dois métodos:

1.º Pode determinar-se a equação de S a partir da de C . Neste caso, é possível utilizar os programas do capítulo 11.

2.º Pode também representar-se S de uma maneira aproximada graças a um poliedro.

1 Superfície de equação $x = f(\sqrt{x^2 + y^2})$

Seja, para $0 \leq x_1 \leq x \leq x_2$, $z = f(x)$ a equação cartesiana de uma curva C . Vamos supor que a função f é definida e contínua no intervalo $[x_1, x_2]$ (figura 1).

Obtém-se a equação da superfície S substituindo, na equação de C , a variável x pela expressão $\sqrt{x^2 + y^2}$.

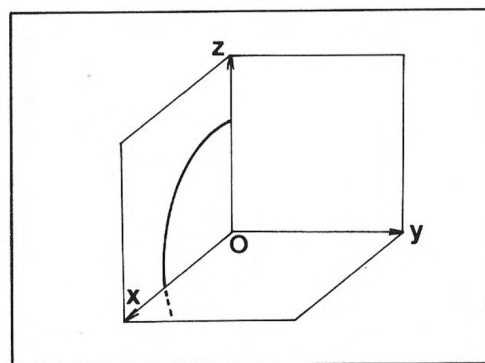


Fig. 1

1. Seja $P = (x, y)$ um ponto qualquer de S : P é a imagem de um ponto $P_0 = (x_0, y_0)$ da curva C , numa rotação de eixo Oz .

Do mesmo modo, a projecção ortogonal H de P no plano xOy é a imagem da projecção ortogonal H_0 do ponto P_0 neste mesmo plano (figura 2).

Uma rotação conserva os comprimentos, e portanto $OH = OH_0$ e $PH = PH_0$.

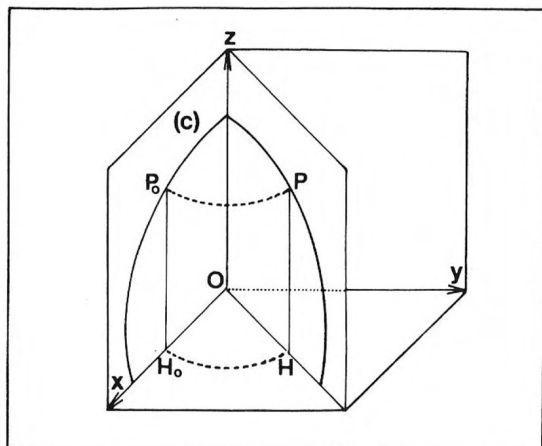


Fig. 2

Estas duas igualdades conduzem a $x^2 + y^2 = x_0^2$ e $z = z_0 = f(x_0)$. Como x_0 é positivo, teremos $x_0 = \sqrt{x^2 + y^2}$. Resulta daqui $z = f(\sqrt{x^2 + y^2})$.

2. Exemplos

As quatro superfícies foram obtidas com o segundo programa do capítulo 11, programa que permite eliminar as partes escondidas.

1.º Consideremos uma curva de Gauss com a equação $x = e^{-x^2}$. A figura 3 mostra esta curva para $0 \leq x \leq 2$.

Rodando em torno de Oz , esta curva produz uma superfície de equação $x = e^{-(x^2 + y^2)}$.

A figura 4 representa esta superfície para $-2 \leq x \leq 2$, $-2 \leq y \leq 2$, $n_x = n_y = 20$.

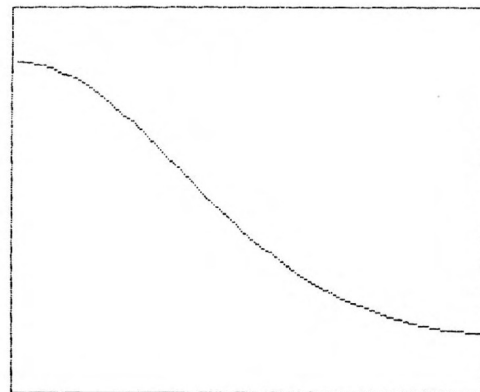


Fig. 3

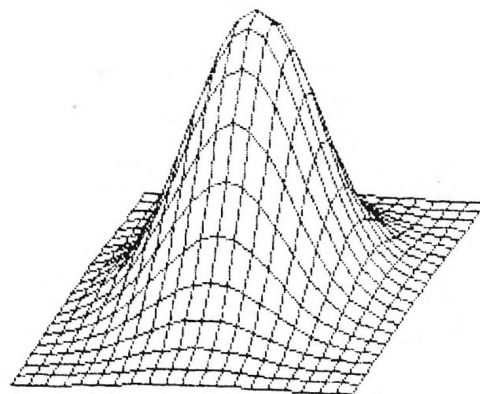


Fig. 4

2.º Consideremos, para $0 \leq x \leq 10$, $z = \frac{\cos x}{2+x}$. A curva correspondente é representada na figura 5.

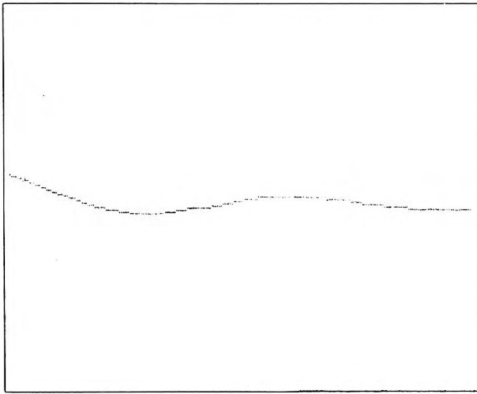


Fig. 5

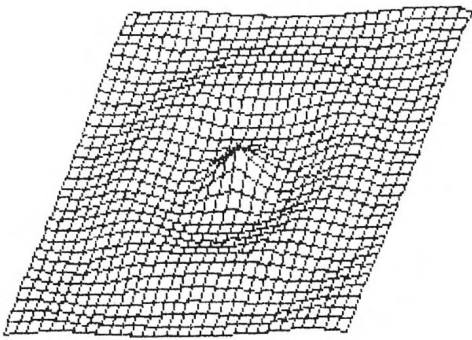


Fig. 6

A superfície S , de equação $z = \frac{\cos \sqrt{x^2+y^2}}{2+\sqrt{x^2+y^2}}$ é representada na figura 6 para $-10 \leq x \leq 10$, $-10 \leq y \leq 10$ e $n_x = n_y = 20$.

3.º A curva da figura 7, definida para $0 \leq x \leq 2$, tem como equação $z = x \sin x$.

Produz uma superfície de equação $z = \sqrt{x^2+y^2} \times \sin(\sqrt{x^2+y^2})$. Para $-2 \leq x \leq 2$, $-2 \leq y \leq 2$, $n_x = n_y = 20$, esta superfície é representada na figura 8.

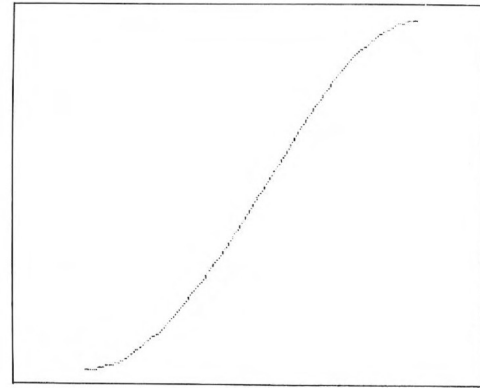


Fig. 7

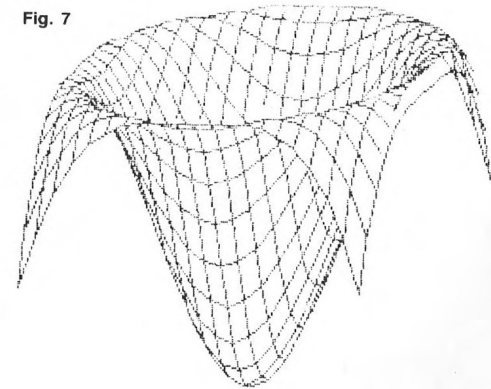


Fig. 8

4.º Seja $z = \sqrt{x}$, com $x \geq 0$. Esta curva é representada para $0 \leq x \leq 2$, na figura 9.

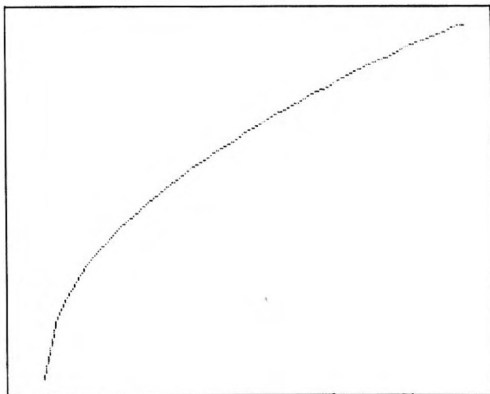


Fig. 9

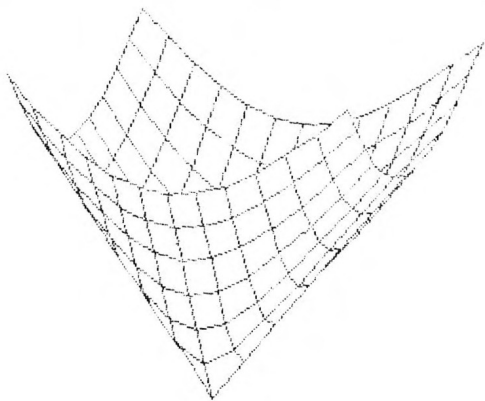


Fig. 10

A superfície produzida tem por equação $z = \sqrt{x^2 + y^2}$. Esta superfície é representada na figura 10 para $-2 \leq x \leq 2$, $-2 \leq y \leq 2$, $n_x = n_y = 12$.

2 Superfícies de equação $x = f(r)$

Nas mesmas condições do parágrafo 1, consideremos $r = \sqrt{x^2 + y^2}$. A equação da superfície S passa a $z = f(r)$.

1. Programa

Modificaremos ligeiramente o programa número 1 do capítulo 11 (não haverá portanto eliminação das partes escondidas).

1.º A definição de $f(r)$ será dada na linha 10, que passará a:

```
10 DEF FN z(r) = . . . . .
```

2.º Substituiremos a linha 190 pela seguinte:

```
190 LET z(i,j) = FN z(r)
```

3.º Finalmente, acrescentaremos esta linha:

```
185 LET r = SQR (x(i)*x(i)+y(j)*y(j))
```

2. Exemplos

Seja $z = \frac{r^2}{1+r^2}$.

Para $-2 \leq x \leq 2$, $-2 \leq y \leq 2$ e $n_x = n_y = 10$, obtemos a superfície da figura 11.

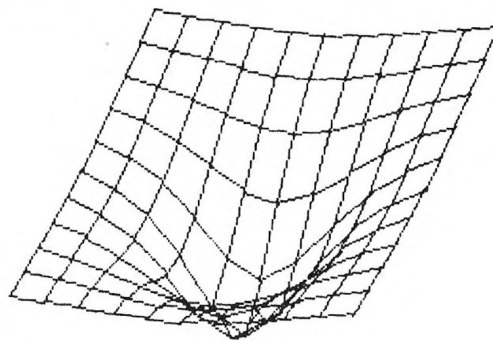


Fig. 11

2.º Consideremos agora $z = \frac{\cos r^2}{1+r^2}$ com $-2 \leq x \leq 2$ e $-2 \leq y \leq 2$.
Para $n_x = 24$ e $n_y = 24$, obtemos a superfície da figura 12.

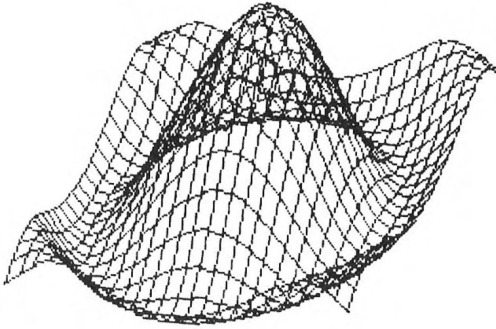


Fig. 12

3 Construção aproximada de uma superfície de revolução

Para obter uma representação aproximada da superfície de revolução produzida por uma curva C do plano xOz , devemos proceder a duas aproximações:

- a curva C é substituída por uma linha poligonal L ;
- os círculos descritos para cada um dos pontos de C são substituídos por polígonos regulares.

1. Começemos por escolher numa curva C um número n_p de pontos. Estes pontos serão designados por $P_{1,1}, P_{2,1}, P_{3,1}, \dots, P_{n_p,1}$. Ligando estes pontos por segmentos de recta, definimos uma linha poligonal L contida no plano xOz (figura 13).

2. Escolhamos em seguida um ângulo φ cujo valor em graus divide 360° . Por rotações de ângulos $\varphi, 2\varphi, 3\varphi$, etc., em torno do eixo Oz , obteremos linhas com os números 2, 3, 4, etc.

Consideremos $n_L = \frac{360^\circ}{\varphi}$: existirão ao todo n_L linhas poligonais.

A linha número 2 conterá os pontos $P_{1,2}, P_{2,2}, P_{3,2}$, etc.

A linha número 3 conterá os pontos $P_{1,3}, P_{2,3}, P_{3,3}$, etc.

De um modo geral, a notação $P_{i,j}$ designará o ponto da ordem i da linha de ordem j .

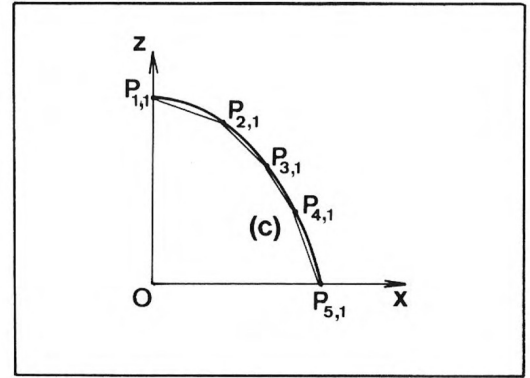


Fig. 13

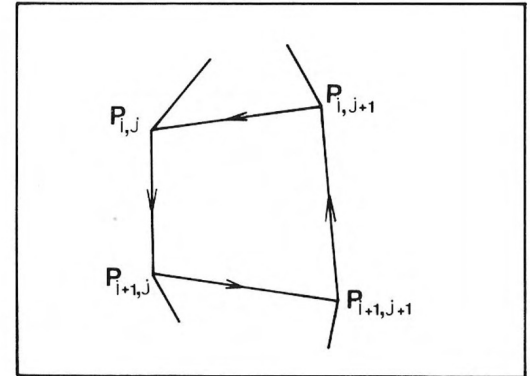


Fig. 14

3. Ligando convenientemente certos pontos de duas linhas vizinhas, podem-se definir *facetas* (figura 14).

Estas facetas são polígonos que poderão ser orientados de modo a permitir, no caso de um poliedro convexo, a eliminação das partes escondidas.

4 Construção aproximada de um cilindro recto

Consideremos o segmento [A, B] da figura 15: os pontos A e B têm como coordenadas respectivas 40, 0, 50 e 40, 0, -50. Uma rotação deste segmento de 360° em torno do eixo Oz produz um cilindro recto de bases circulares com o diâmetro de 80 e a altura de 100 (estes números foram escolhidos de modo a permitir o desenho directo do cilindro no visor).

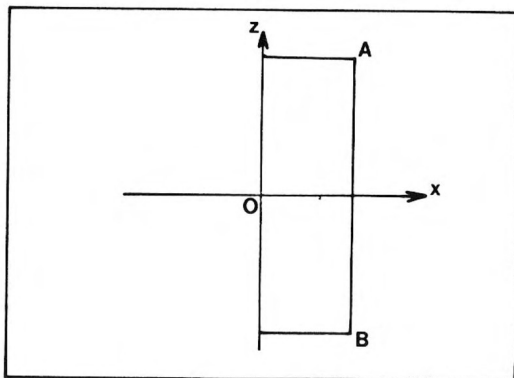


Fig. 15

Vamos representar este cilindro por um prisma recto que conterà n_L arestas laterais.

O programa possui 4 partes.

1. A primeira parte permite definir as coordenadas dos dois pontos da primeira linha e escolher o número n_L das linhas poligonais.

Fez-se DIM X (2, 1+NL) e não DIM X (2, NL) de modo a obter arestas fechadas: identifica-se portanto o ponto $P_{i,1+NL}$ ao ponto $P_{i,1}$.

```
10 DATA 40,0,50,40,0,-50
20 INPUT "QUANTAS LINHAS POLIG"
   ONAIS? ";nL
30 DIM X(2,1+nL)
40 DIM Y(2,1+nL)
50 DIM Z(2,1+nL)
60 FOR I=1 TO 2
70 READ X,Y,Z
```

```
80 LET X(I,1)=X
90 LET Y(I,1)=Y
100 LET Z(I,1)=Z
110 NEXT I
```

2. O ângulo φ é representado pela variável F. As coordenadas dos pontos das linhas numeradas 2, 3, 4, ..., n_L são calculadas a partir das dos pontos da linha 1.

Utilizam-se as fórmulas do capítulo 3, parágrafo 4.2 para as rotações de ângulo φ , 2φ , 3φ , etc.

```
120 LET F=2*PI/nL
130 FOR J=2 TO 1+nL
140 LET C=COS((J-1)*F)
150 LET S=SIN((J-1)*F)
160 FOR I=1 TO 2
170 LET X(I,J)=X(I,1)*C-Y(I,1)*S
180 LET Y(I,J)=X(I,1)*S+Y(I,1)*C
190 LET Z(I,J)=Z(I,1)
200 NEXT I
210 NEXT J
```

3. Calcula-se a imagem utilizando uma perspectiva cavaleira.

```
220 FOR J=1 TO 1+nL
230 FOR I=1 TO 2
240 LET X(I,J)=X(I,J)+.375*Y(I,J)
250 LET Z(I,J)=Z(I,J)+.375*Y(I,J)
260 NEXT I
270 NEXT J
```

4. A última parte permite desenhar as facetas.

```
280 FOR J=1 TO nL
290 FOR I=1 TO 2
300 PLOT 128+X(I,J),88+Z(I,J)
310 IF I=1 THEN DRAW X(I+1,J)-X(I,J),Z(I+1,J)-Z(I,J)
320 PLOT 128+X(I,J),88+Z(I,J)
330 DRAW X(I,J+1)-X(I,J),Z(I,J+1)-Z(I,J)
340 NEXT I
350 NEXT J
```

5. As figuras 16, 17, 18 e 19 apresentam os prismas obtidos para diversos valores de n_L .

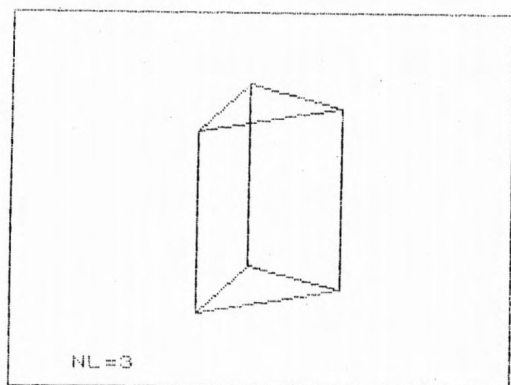


Fig. 16

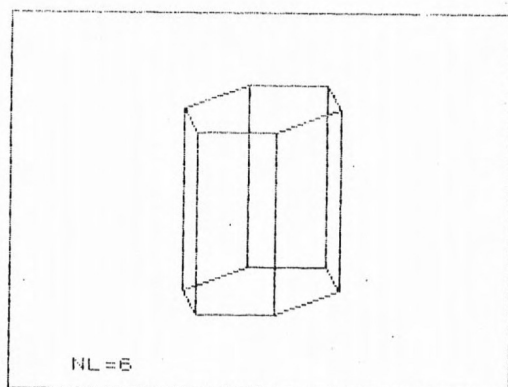


Fig. 17

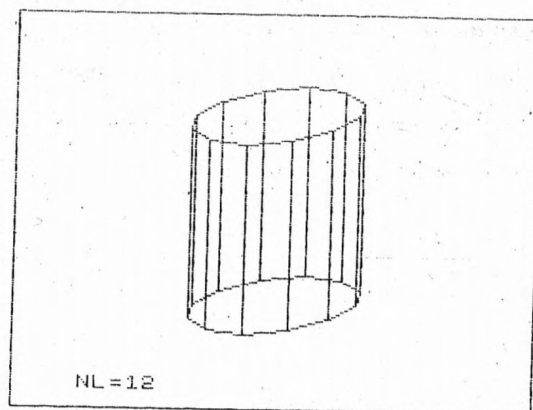


Fig. 18

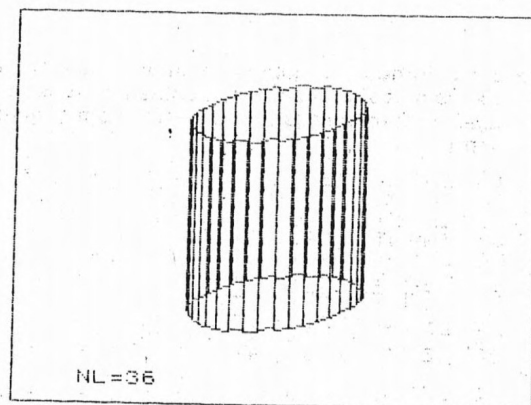


Fig. 19

5 Construção aproximada de um elipsóide

Consideremos uma semi-elipse de semi-grande eixo e semi-pequeno eixo b (figura 20).

Ao rodar em torno do eixo Oz, esta semi-elipse produz um elipsóide.

O programa que permite desenhar este elipsóide engloba quatro partes.

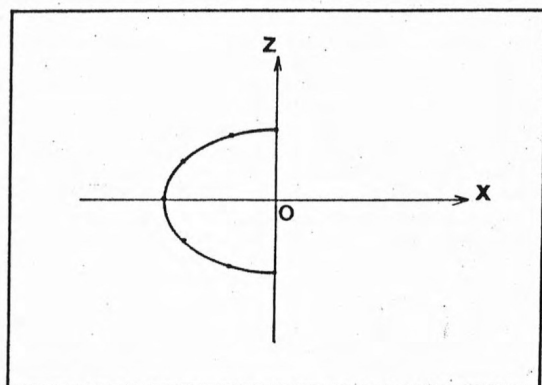


Fig. 20

1. Nesta parte, fornece os quatro parâmetros a, b, n_l e n_p.

As coordenadas de cada um dos n_p pontos da primeira linha são calculadas graças à representação paramétrica bem conhecida $x = a \cos t$ e $y = b \sin t$.

```
10 INPUT "EIXO MAIOR? ";a
20 INPUT "EIXO MENOR? ";b
30 INPUT "VALOR DE NP? ";np
40 INPUT "VALOR DE NL? ";nl
50 DIM x(1+np,1+nl)
60 DIM y(1+np,1+nl)
70 DIM z(1+np,1+nl)
80 LET t=PI/(np-1)
90 FOR i=1 TO 1+np
100 LET x(i,1)=a*COS (PI/2+(i-1)*t)
110 LET z(i,1)=b*SIN (PI/2+(i-1)*t)
120 LET y(i,1)=0
130 NEXT i
```

2. Calculam-se as coordenadas dos n_p pontos das linhas com os números 2, 3, etc.

```
140 LET f=2*PI/nl
150 FOR j=2 TO 1+nl
160 LET c=COS ((j-1)*f)
170 LET s=SIN ((j-1)*f)
180 FOR i=1 TO 1+np
190 LET x(i,j)=x(i,1)*c-y(i,1)*s
200 LET y(i,j)=x(i,1)*s+y(i,1)*c
210 LET z(i,j)=z(i,1)
220 NEXT i
230 NEXT j
```

3. Calcula-se a imagem utilizando uma perspectiva cavaleira.

```
240 FOR j=1 TO 1+nl
250 FOR i=1 TO 1+np
260 LET x(i,j)=x(i,j)+.65*y(i,j)
270 LET z(i,j)=z(i,j)+.375*y(i,j)
280 NEXT i
290 NEXT j
```

4. Desenham-se as facetas eliminando as partes escondidas. Para tal, calcula-se:

$$\overrightarrow{P_{i+1,j}} \wedge \overrightarrow{P_{i+1,j+1}} \wedge \overrightarrow{P_{i,j+1}}$$

```
300 FOR j=1 TO nl
310 FOR i=1 TO np
320 LET p=(x(i+1,j)-x(i+1,j+1))*
*(z(i+1,j)-z(i+1,j+1))-(x(i+1,j)-x
(i,j+1))*(z(i+1,j)-z(i,j+1))
330 IF p>0 THEN GO TO 390
340 PLOT 128+x(i,j),88+z(i,j)
350 DRAW x(i+1,j)-x(i,j),z(i+1,
j)-z(i,j)
360 DRAW x(i+1,j+1)-x(i+1,j),z(
i+1,j+1)-z(i+1,j)
370 DRAW x(i,j+1)-x(i+1,j+1),z(
i,j+1)-z(i+1,j+1)
380 DRAW x(i,j)-x(i,j+1),z(i,j)
-z(i,j+1)
390 NEXT i
400 NEXT j
```

5. A figura 21 foi obtida considerando $a=80$, $b=70$, $n_p=16$, $n_L=16$.

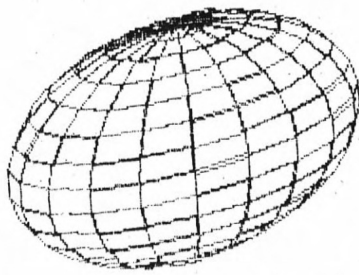


Fig. 21

No caso do elipsóide da figura 22, teremos $n_p=16$ e $n_L=12$.

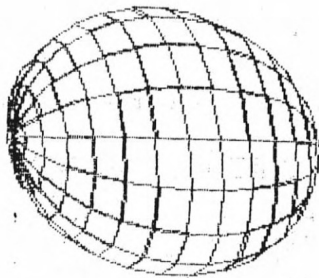


Fig. 22

Consideremos um prisma que possui n faces laterais. Para n suficientemente grande, um tal prisma poderá ser assemelhado a um cilindro (figura 1).

Do mesmo modo, pode obter-se um cone a partir de uma pirâmide (figura 2).

No entanto, a presença de numerosas arestas laterais não é desejável. Para desenhar os cilindros e os cones com traços, como na figura 3, será portanto necessário recorrer a um outro método.

Limitar-nos-emos, neste capítulo, ao caso de um cilindro recto de base circular e ao de um cone regular, também de base circular.

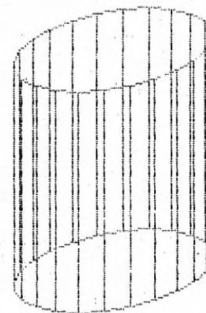


Fig. 1

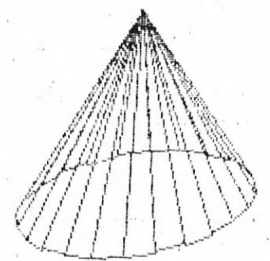


Fig. 2

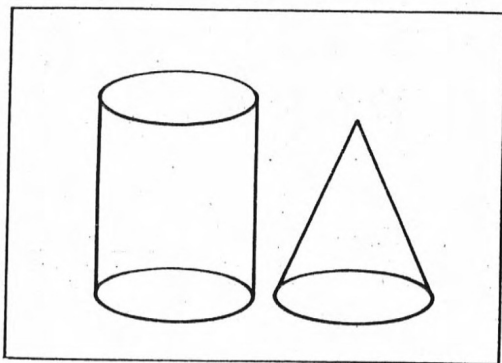


Fig. 3

1 Caso do cilindro

Considere-se um cilindro recto de raio $R=50$ e de altura $H=120$ (estes valores foram escolhidos de modo a serem directamente compatíveis com as dimensões do visor, a fim de evitar o recurso a um procedimento de enquadramento).

Em perspectiva cavaleira, um tal cilindro é representado do modo indicado na figura 4.

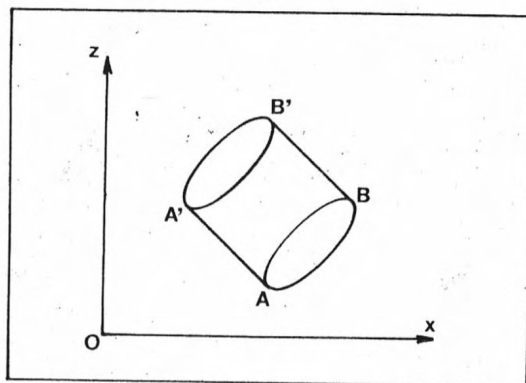


Fig. 4

A imagem inclui portanto:

- Duas elipses que representam as arestas circulares;
- As tangentes comuns AA' e BB' a estas elipses.

1. Definição das arestas circulares

Cada aresta circular é substituída por um polígono regular de n lados.

O referencial escolhido tem como origem O , o centro do cilindro, passando o eixo Oz pelos centros das faces circulares.

Para definir, neste referencial, as coordenadas dos n vértices de cada polígono regular, utilizam-se as equações clássicas do círculo $x=R \cos t$ e $y=R \sin t$.

```

5 REM dados
10 LET h=80
20 LET r=50
30 LET n=40
35 REM coordenadas dos pontos
   dos círculos
40 DIM x(2*n)
50 DIM y(2*n)
60 DIM z(2*n)
70 FOR i=1 TO n
80 LET t=(i-1)*2*PI/(n-1)
90 LET x(i)=r*COS t
100 LET x(i+n)=x(i)
110 LET y(i)=r*SIN t
120 LET y(i+n)=y(i)
130 LET z(i)=h/2
140 LET z(i+n)=-h/2
150 NEXT i

```

2. Deslocamentos do cilindro

Limitámo-nos a uma rotação em torno do eixo Oy .

```

155 REM rotacao em torno de Oy
160 INPUT "INDIQUE ANGULO EM GR
   AUS, OU 0: ",ry
170 LET ry=ry*PI/180
180 LET c=COS ry
190 LET s=SIN ry
200 FOR i=1 TO 2*n
210 LET u=x(i)*c-z(i)*s
220 LET v=x(i)*s+z(i)*c
230 LET x(i)=u
240 LET z(i)=v
250 NEXT i

```

3. Cálculo da imagem

Utiliza-se uma perspectiva cavaleira. As variáveis x e z servem para designar as coordenadas no espaço, e também no plano de projecção.

```

295 REM desenho das elipses
300 FOR i=1 TO n-1
310 PLOT 128+x(i),80+z(i)
320 DRAW x(i+1)-x(i),z(i+1)-z(i)
)
330 PLOT 128+x(i+n),80+z(i+n)
340 DRAW x(i+n+1)-x(i+n),z(i+n+1)-z(i+n)
350 NEXT i

```

4. Desenho das arestas circulares

```

355 REM desenho das partes rect
as no caso de rotacao em torno d
e Oy
360 IF ry=0 THEN GO TO 510
370 LET wmin=10e30
380 LET wmax=-10e30
390 FOR i=1 TO n
400 LET w=(x(i+n)*z(i)-x(i)*z(i+n))/
(x(i+n)-x(i))
410 IF w<wmin THEN LET j1=i
420 IF w<wmin THEN LET wmin=w
430 IF w>wmax THEN LET j2=i
440 IF w>wmax THEN LET wmax=w
450 NEXT i
460 PLOT 128+x(j1),80+z(j1)
470 DRAW x(n+j1)-x(j1),z(n+j1)-
z(j1)
480 PLOT 128+x(j2),80+z(j2)
490 DRAW x(n+j2)-x(j2),z(n+j2)-
z(j2)
500 GO TO 9999

```

5. Desenho das tangentes comuns

São de considerar dois casos conforme o eixo do cilindro é paralelo ou não ao eixo Oz .

1.º caso

O eixo do cilindro não é paralelo ao eixo Oz : isto pressupõe que se tenha escolhido uma rotação de ângulo não nulo em torno de Oy .

Seja $M(i)$ um ponto qualquer da elipse que represente a aresta circular inferior do cilindro.

Designemos por $x(i)$ e $z(i)$ as coordenadas deste ponto no plano de projecção organizado por um referencial Ouv .

Seja M' o ponto da elipse que representa a aresta circular superior do cilindro definido por $\vec{M(i)M'} = \vec{AA'} = \vec{BB'}$ (ver figura 5).

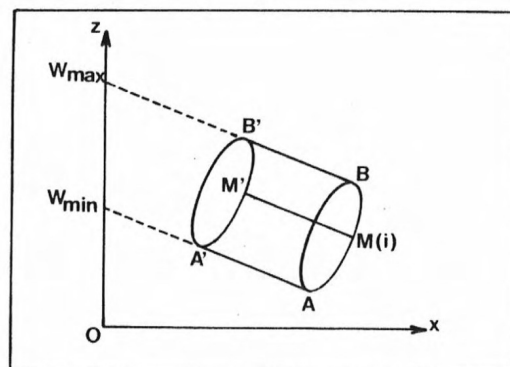


Fig. 5

As coordenadas de M' são $x(i+n)$ e $z(i+n)$.

A recta $M(i)M'$ intersecta o eixo Ov num ponto P de ordenada:

$$W = \frac{x(i+n)z(i) - x(i)z(i+n)}{x(i+n) - x(i)}$$

Quando $M(i)$ descreve a elipse inferior, a recta $M(i)M'$ varia entre as posições extremas (AA') e (BB').

O ponto P varia entre os pontos Q_1 e Q_2 cujas ordenadas são, respectivamente, W_{min} e W_{max} . Estes pontos Q_1 e Q_2 correspondem a pontos da elipse inferior cujos índices são respectivamente j_1 e j_2 .

2.º caso

Neste caso (figura 6), basta determinar as abcissas x_{\min} e x_{\max} dos pontos A e A'.

```

005 REM desenho das partes rect
006 da ausencia de rotacao sobre
007 OY
008 LET xmin=10000
009 LET xmax=-10000
010 FOR i=1 TO n
011 IF x(i)<xmin THEN LET J1=i
012 IF x(i)<xmin THEN LET xmin=
x(i)
013 IF x(i)>xmax THEN LET J2=i
014 IF x(i)>xmax THEN LET xmax=
x(i)
015 NEXT i
016 PLOT 100+x(J1),80+z(J1)
017 DRAW x(n+J1)-x(J1),z(n+J1)-
z(J1)
018 PLOT 100+x(J2),80+z(J2)
019 DRAW x(n+J2)-x(J2),z(n+J2)-
z(J2)

```

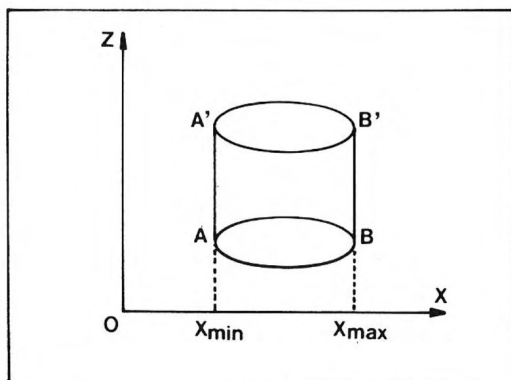


Fig. 6

6. Resultados

As figuras 7, 8 e 9 representam o cilindro, com e sem eliminação das partes escondidas.

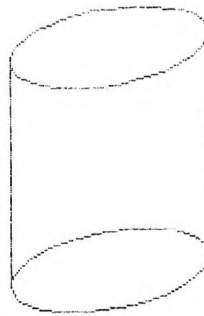


Fig. 7

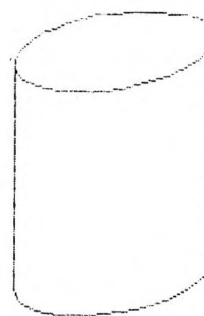


Fig. 8

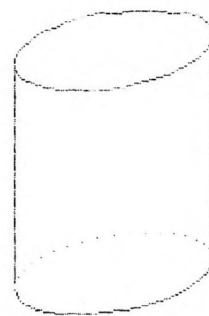


Fig. 9

2 Cone

Consideremos um cone recto de vértice S: se C é o centro do círculo de base, a recta (SC) é perpendicular ao plano contendo este círculo.

Seja $R = 40$ o raio do círculo de base e seja $H = 80$ a altura do cone.

1. Definição da aresta circular

Consideremos como vértice um referencial ortonormado de origem $O = C$, coincidindo o eixo Oz com a recta SC .

O círculo de base é representado por um polígono regular de n lados. As coordenadas dos vértices deste polígono são calculadas, para i variando entre 1 e n , graças às fórmulas $x = R \cos t$, $y = R \sin t$,

$$t = 2\pi \times \frac{i-1}{n-1}.$$

```

005 REM desenho das partes rect
006 da ausencia de rotacao sobre
007 OY
008 LET xmin=10000
009 LET xmax=-10000
010 FOR i=1 TO n
011 IF x(i)<xmin THEN LET J1=i
012 IF x(i)<xmin THEN LET xmin=
x(i)
013 IF x(i)>xmax THEN LET J2=i
014 IF x(i)>xmax THEN LET xmax=
x(i)
015 NEXT i
016 PLOT 100+x(J1),80+z(J1)
017 DRAW x(n+J1)-x(J1),z(n+J1)-
z(J1)
018 PLOT 100+x(J2),80+z(J2)
019 DRAW x(n+J2)-x(J2),z(n+J2)-
z(J2)

```

```

100 LET z=0
100 LET z=h
100 REM coordenadas dos pontos
40 circulo de base
70 DIM x(n)
80 DIM u(n)
90 DIM z(n)
100 FOR i=1 TO n
110 LET t=2*PI*(i-1)/(n-1)
120 LET x(i)=r*COSE t
130 LET u(i)=r*SEIN t
140 LET z(i)=0
150 NEXT i

```

2. Deslocamentos do cone

Limitámo-nos a uma rotação em torno do eixo Oy.

Uma rotação em torno do eixo Oz não apresenta qualquer interesse dada a posição inicial do cone. Para introduzir uma rotação de eixo Ox, será necessário utilizar as fórmulas do capítulo 3.

Neste caso, será necessário ter em conta o facto de a projecção do vértice do cone poder encontrar-se no interior da elipse. Não se poderão nessas condições traçar tangentes à elipse, dado que não existem.

```

155 REM rotacao em torno de OY
160 INPUT "INDIQUE ANGULO EM GR
AUS, OU 0:"; r4
170 LET r4=r4*PI/180
180 LET c=COSE r4
190 LET s=SEIN r4
200 FOR i=1 TO n
210 LET u=x(i)*c-z(i)*s
220 LET v=x(i)*s+z(i)*c
230 LET x(i)=u
240 LET z(i)=v
250 NEXT i
260 LET u=x5*c-z5*s
270 LET v=x5*s+z5*c
280 LET x5=u
290 LET z5=v

```

3. Cálculo da imagem

A perspectiva empregue é uma perspectiva cavaleira, na qual se utilizaram de novo as variáveis x e z.

```

00000 REM calculo da perspectiva
00000 FOR i=1 TO n
00000 LET x(i)=x(i)+,075*u(i)
00000 LET z(i)=z(i)+,075*v(i)
00000 NEXT i
00400 LET xs=x5+,075*u5
00600 LET zs=z5+,075*v5

```

4. Determinação das tangentes

Seja M um ponto qualquer da elipse que representa a aresta circular (figura 10).

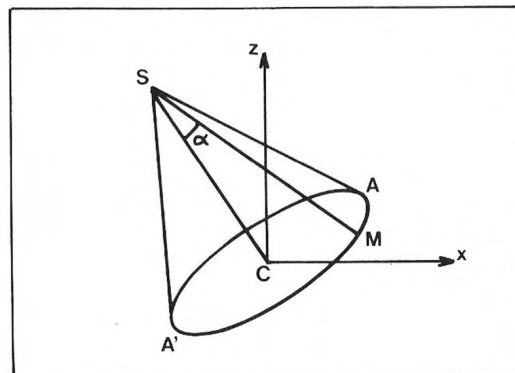


Fig. 10

Sendo o plano de projecção referenciado a um sistema ortonormal O'uv, com O=C, designemos por x(i) e z(i) as coordenadas de M, por x_s e z_s as de S.

Seja α o ângulo (\vec{SC}, \vec{SM}) : este ângulo é máximo quando M se encontra em A, e mínimo quando M está em A'.

Utilizando o produto vectorial $\vec{SC} \wedge \vec{SM}$, pode escrever-se

$$\sin \alpha = \frac{|\vec{SC} \wedge \vec{SM}|}{||\vec{SC}|| \times ||\vec{SM}||}$$

com

$$\vec{SC} \wedge \vec{SM} = [x(i) - x_s] z_s - x_s [z(i) - z_s],$$

$$||\vec{SC}|| = \sqrt{x_s^2 + z_s^2}$$

e

$$||\vec{SM}|| = \sqrt{[x(i) - x_s]^2 + [z(i) - z_s]^2}$$

Como $-\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}$, $\sin \alpha$ varia como α : M está, portanto, em A' quando $\sin \alpha$ é mínimo e em A quando $\sin \alpha$ é máximo. Basta então determinar os índices j_1 e j_2 que correspondem a estes valores.

```

355 REM determinacao das tangen
tes
360 LET smax=-10e30
370 LET smin=10e30
380 FOR i=1 TO n
390 LET d1=SQRT (xs*xs+zs*zs)
400 LET d2=SQRT ((x(i)-xs)*(x(i)
-x(i))+(z(i)-zs)*(z(i)-zs))
410 LET p=zs*(x(i)-xs)-xs*(z(i)
-zs)
420 LET s=p/(d1+d2)
430 IF s<smin THEN LET j1=i
440 IF s<smin THEN LET smin=s
450 IF s>smax THEN LET j2=i
460 IF s>smax THEN LET smax=s
470 NEXT i

```

5. Desenho

```

475 REM desenho
480 FOR i=1 TO n-1
490 PLOT 128+x(i),88+z(i)
500 DRAW x(i+1)-x(i),z(i+1)-z(i)
510 NEXT i
520 PLOT 128+xs,88+zs
530 DRAW x(j1)-xs,z(j1)-zs
540 PLOT 128+xs,88+zs
550 DRAW x(j2)-xs,z(j2)-zs

```

6. Resultados

As figuras 11, 12, 13 e 14 apresentam diversos aspectos do cone após rotação em torno do eixo Oy.

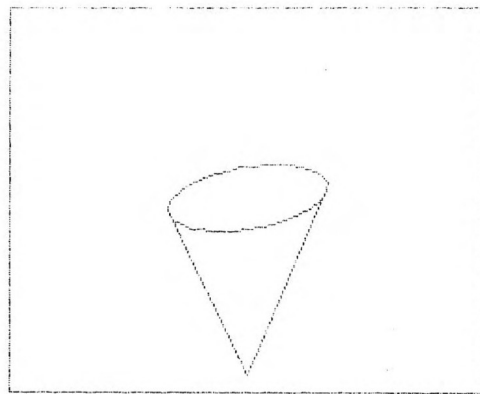


Fig. 11. — Rotação: 180 graus.

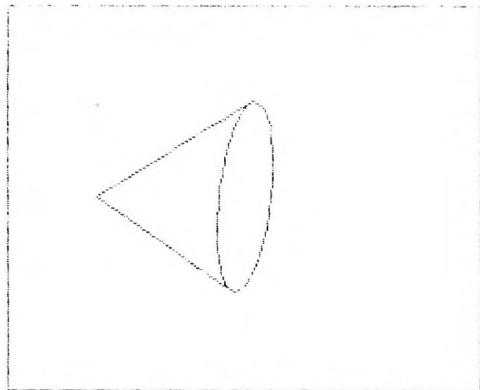


Fig. 12. — Rotação: 90 graus.

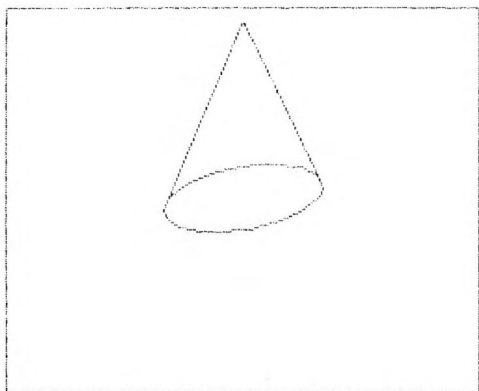


Fig. 13. — Rotação: 0 graus.

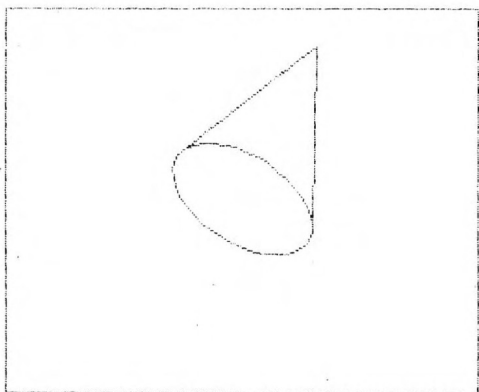


Fig. 14. — Rotação: -30 graus.

Se o espaço organizado por um sistema ortonormado, seja S uma superfície qualquer.

As coordenadas x , y e z de cada um dos pontos de S podem depender de outras variáveis designadas parâmetros. Dispõe-se então de uma representação paramétrica da superfície S .

Neste capítulo, utilizaremos três tipos de representação paramétrica.

1 As coordenadas cilíndricas

1. Definição

Na figura 1, o ponto M é definido graças ao ângulo θ , ao comprimento $r = \overline{OH}$ e ao lado $z = \overline{HM}$.

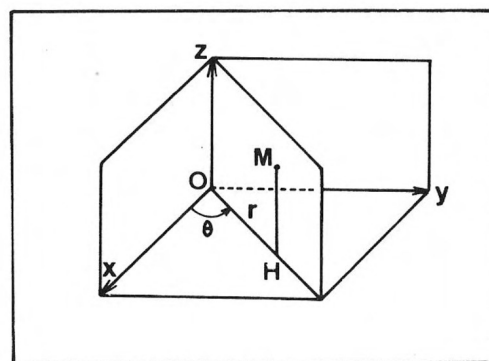


Fig. 1

Estes três números constituem as coordenadas cilíndricas do ponto M.

É fácil ver que $x = r \cos \theta$ e $y = r \sin \theta$.

2. Método

Deseja representar-se uma superfície definida, em coordenadas cilíndricas, por uma equação do tipo $z = f(r, \theta)$.

O princípio de representação desta superfície a usar neste programa é idêntico ao do capítulo 11, parágrafo 1.

r varia entre r_{\min} e r_{\max} , enquanto θ varia entre θ_{\min} e θ_{\max} .

Divide-se o intervalo $[r_{\min}, r_{\max}]$ em $n_r - 1$ partes iguais donde, para

$$1 \leq i \leq n_r, \quad r_i = r_{\min} + (i-1) \left[\frac{r_{\max} - r_{\min}}{n_r - 1} \right].$$

Divide-se igualmente o intervalo $[\theta_{\min}, \theta_{\max}]$ em $n_\theta - 1$ partes

$$\text{iguais donde, para } 1 \leq j \leq n_\theta, \quad \theta_j = \theta_{\min} + (j-1) \left[\frac{\theta_{\max} - \theta_{\min}}{n_\theta - 1} \right].$$

Dispomos então de uma rede (figura 2) cujos pontos têm como coordenadas:

$$x(i,j) = r_i \cos \theta_j$$

$$y(i,j) = r_i \sin \theta_j$$

$$z(i,j) = f(r_i, \theta_j)$$

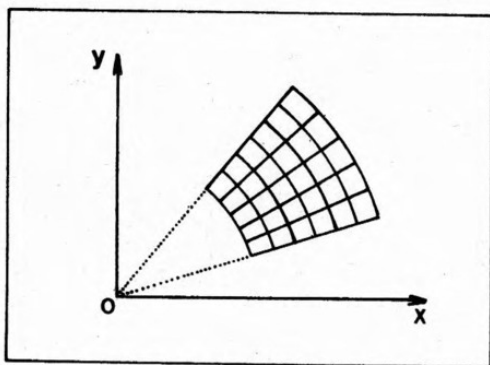


Fig. 2

3. Programa

Engloba cinco partes. Para o utilizarmos, teremos primeiro de definir a função $z = f(r, \theta)$ na linha 10.

As variáveis θ e n_θ são designadas, respectivamente, pelas letras T e NT.

```

5 REM dados e calculo dos intervalos
10 DEF FN z(r,t)=t/r
20 INPUT "Rmin: ";rmin
30 INPUT "Rmax: ";rmax
40 INPUT "Tmin (em graus): ";tmin
50 INPUT "Tmax (em graus): ";tmax
55 LET tmin=tmin*.0174533
56 LET tmax=tmax*.0174533
60 INPUT "NR: ";nr
70 INPUT "NT: ";nt
80 DIM r(nr)
90 DIM t(nt)
100 FOR j=1 TO nt
110 LET t(j)=tmin+(j-1)*(tmax-tmin)/(nt-1)
120 NEXT j
130 FOR i=1 TO nr
140 LET r(i)=rmin+(i-1)*(rmax-rmin)/(nr-1)
150 NEXT i
155 REM coordenadas dos pontos da rede
160 DIM x(nr,nt)
170 DIM y(nr,nt)
180 DIM z(nr,nt)
190 FOR i=1 TO nr
200 FOR j=1 TO nt
210 LET x(i,j)=r(i)*COS t(j)
220 LET y(i,j)=r(i)*SIN t(j)
230 LET z(i,j)=FN z(r(i),t(j))
240 NEXT j
250 NEXT i
255 REM calculo da imagem (perspectiva cavaleira)
260 DIM u(nr,nt)
270 DIM v(nr,nt)
280 LET umin=10E30
290 LET vmin=10E30
300 LET vmax=-10E30
310 LET vmax=-10E30
320 FOR i=1 TO nr
330 FOR j=1 TO nt
340 LET u(i,j)=x(i,j)+.375*y(i,j)

```

```

350 LET v(i,j)=z(i,j)+.375*y(i,j)
360 IF u(i,j)<umin THEN LET umi
n=u(i,j)
370 IF v(i,j)<vmin THEN LET vmi
n=v(i,j)
380 IF u(i,j)>umax THEN LET uma
x=u(i,j)
390 IF v(i,j)>vmax THEN LET vma
x=v(i,j)
400 NEXT j
410 NEXT i
415 REM enquadramento da imagem
420 LET k1=255/(umax-umin)
430 LET k2=175/(vmax-vmin)
440 LET l1=255-k1*umax
450 LET l2=175-k2*vmax
460 FOR i=1 TO nr
470 FOR j=1 TO nt
480 LET u(i,j)=k1*u(i,j)+l1
490 LET v(i,j)=k2*v(i,j)+l2
500 NEXT j
510 NEXT i
515 REM desenho
520 FOR i=1 TO nr
530 FOR j=1 TO nt
540 IF i<nr-1 THEN PLOT u(i,j)
v(i,j): DRAW u(i+1,j)-u(i,j),v(
i+1,j)-v(i,j)
550 IF j<nt-1 THEN PLOT u(i,j)
v(i,j): DRAW u(i,j+1)-u(i,j),v(
i,j+1)-v(i,j)
560 NEXT j
570 NEXT i

```

4. Exemplos

Daremos cinco exemplos de superfícies obtidas com este programa.

1.º Fig. 3: cone recto de equação $z=r$.

2.º Fig. 4: parabolóide elíptico de equação $z=r^2$.

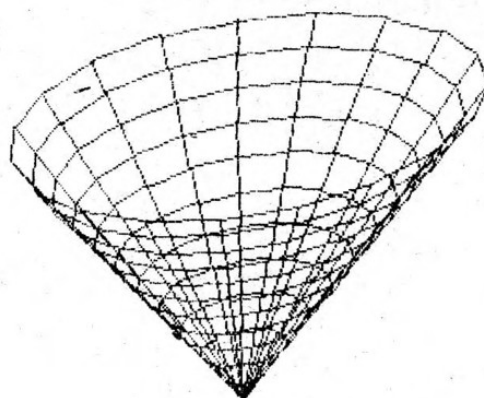


Fig. 3

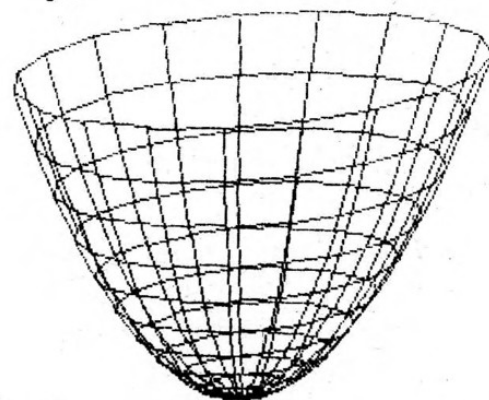


Fig. 4

3.º Fig. 5: cone parabólico de equação $z = \sqrt{r}$, com $r \geq 0$.

4.º Fig. 6: cone hiperbólico de equação $z = \frac{1}{r}$, com $r \neq 0$.

5.º A fig. 7 apresenta a superfície $z = \frac{\theta}{r}$ obtida com $r_{\min} = 1$, $r_{\max} = 4$, $\theta_{\min} = 0^\circ$, $\theta_{\max} = 270^\circ$, $n_r = 5$ e $n_\theta = 20$.

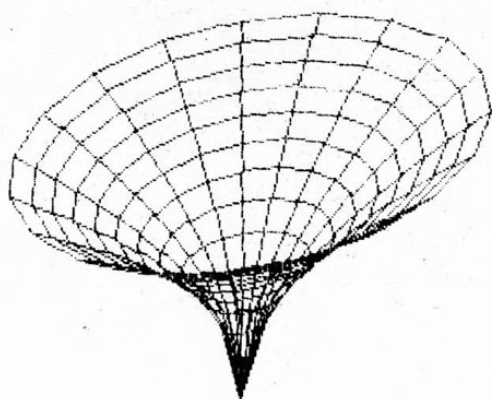


Fig. 5

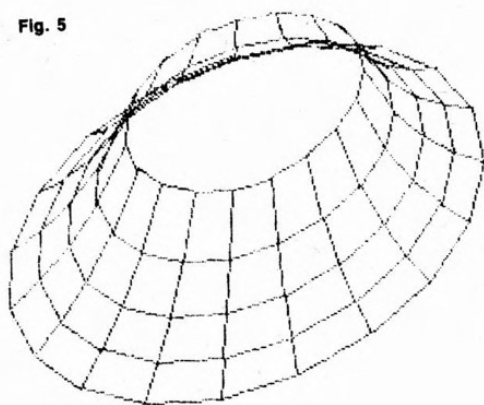


Fig. 6

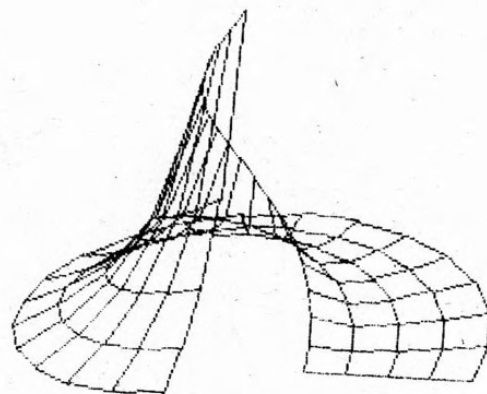


Fig. 7

2 Coordenadas esféricas

1. Definições

Na figura 8, o ponto M é definido pelos dois ângulos φ e θ e pelo número $r = OM$. φ e θ serão designados respectivamente por latitude e longitude do ponto M.

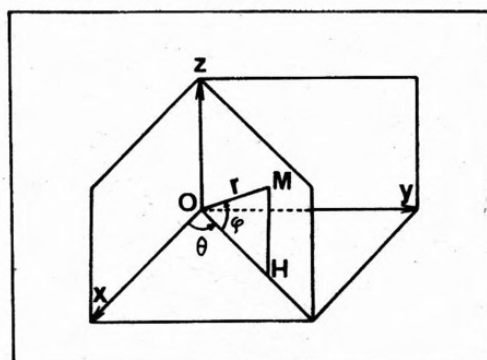


Fig. 8

Estes três números constituem as coordenadas esféricas do ponto M.

Obtemos facilmente:

$$\begin{aligned}x &= r \cos \varphi \cos \Theta, \\y &= r \cos \varphi \sin \Theta,\end{aligned}$$

e

$$z = r \sin \varphi.$$

Em coordenadas esféricas a equação de uma superfície é do tipo $r = f(\Theta, \varphi)$.

2. Variáveis do programa

Θ está compreendido entre Θ_{\min} e Θ_{\max} , e φ entre φ_{\min} e φ_{\max} .

Os intervalos $[\Theta_{\min}, \Theta_{\max}]$ e $[\varphi_{\min}, \varphi_{\max}]$ são divididos, respectivamente, em $n_{\Theta} - 1$ e $n_{\varphi} - 1$ partes iguais. Obtemos então:

$$\Theta_i = \Theta_{\min} + (i - 1) \left[\frac{\Theta_{\max} - \Theta_{\min}}{n_{\Theta} - 1} \right]$$

para $1 \leq i \leq n_{\Theta}$ e

$$\varphi_j = \varphi_{\min} + (j - 1) \left[\frac{\varphi_{\max} - \varphi_{\min}}{n_{\varphi} - 1} \right]$$

para $1 \leq j \leq n_{\varphi}$.

Os pontos da rede correspondente têm por coordenadas:

$$\begin{aligned}x(i, j) &= f(\Theta_i, \varphi_j) \cos \varphi_j \cos \Theta_i \\y(i, j) &= f(\Theta_i, \varphi_j) \cos \varphi_j \sin \Theta_i \\z(i, j) &= f(\Theta_i, \varphi_j) \sin \varphi_j\end{aligned}$$

3. Programa

Θ é representado por T, φ por F, n_{Θ} por NT, n_{φ} por NF.

Para utilizar este programa é necessário primeiramente definir a função $r = f(T, F)$ completando a linha 10.

O programa engloba cinco partes:

```
5 REM dados e calculo dos intervalos
10 DEF FN r(t,f)=t
20 INPUT "Tmin (em graus): "; t
30 INPUT "Tmax (em graus): "; t
40 INPUT "Fmin (em graus): "; f
50 INPUT "Fmax (em graus): "; f
60
```

```
65 LET tmin=tmin*.0174533
66 LET tmax=tmax*.0174533
67 LET fmin=fmin*.0174533
68 LET fmax=fmax*.0174533
69 INPUT "NT: "; nt
70 INPUT "NF: "; nf
80 DIM t(nt)
90 DIM f(nf)
100 FOR i=1 TO nt
110 LET t(i)=tmin+(i-1)*(tmax-tmin)/(nt-1)
120 NEXT i
130 FOR j=1 TO nf
140 LET f(j)=fmin+(j-1)*(fmax-fmin)/(nf-1)
150 NEXT j
160 REM coordenadas dos pontos da rede
170 DIM x(nt,nf)
180 DIM y(nt,nf)
190 DIM z(nt,nf)
200 FOR i=1 TO nt
210 FOR j=1 TO nf
220 LET r=FN r(t(i),f(j))
230 LET x(i,j)=r*COS t(i)*COS f(j)
240 LET y(i,j)=r*SIN t(i)*COS f(j)
250 LET z(i,j)=r*SIN f(j)
260 NEXT j
270 NEXT i
280 REM calculo da imagem (perspectiva cavaleira)
290 DIM u(nt,nf)
300 DIM v(nt,nf)
310 LET umin=-10000
320 LET vmin=-10000
330 LET umax=-10000
340 LET vmax=-10000
350 FOR i=1 TO nt
360 FOR j=1 TO nf
370 LET u(i,j)=x(i,j)+.375*y(i,j)
380 LET v(i,j)=z(i,j)+.375*y(i,j)
390 IF u(i,j)<umin THEN LET umi=n=u(i,j)
400 IF v(i,j)<vmin THEN LET vmi=n=v(i,j)
410 IF u(i,j)>umax THEN LET uma=x=u(i,j)
420 IF v(i,j)>vmax THEN LET vma=v(i,j)
430 NEXT j
440 NEXT i
```



```

410 REM equidramento da imagem
420 LET K1=10000/(umax-umin)
430 LET K2=10000/(vmax-vmin)
440 LET L1=10000+K1*umax
450 LET L2=10000+K2*vmax
460 FOR I=1 TO nt
470 FOR J=1 TO nf
480 LET U(I,J)=K1*U(I,J)+L1
490 LET V(I,J)=K2*V(I,J)+L2
500 NEXT J
510 NEXT I
520 REM desenho
530 FOR I=1 TO nt
540 FOR J=1 TO nf
550 IF J=1 THEN PLOT U(I,J)
560 IF J=nt THEN PLOT U(I,J)
570 NEXT J
580 NEXT I

```

4. Exemplos

1.º Em coordenadas esféricas, a equação de uma esfera de raio 1 é $r=1$.

As figuras 9 e 10 mostram uma semi-esfera e uma esfera completa vistas em perspectiva cavaleira, sem eliminação de partes escondidas.



Fig. 9

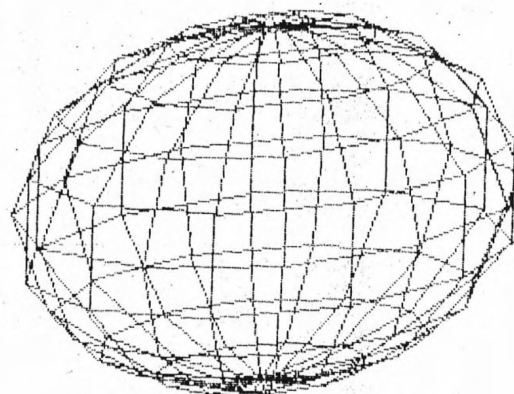


Fig. 10

2.º Seja a equação $r = \theta$ com $45^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$, $0^\circ \leq \varphi \leq 270^\circ$. Para $n_\varphi = n_\theta = 16$, obtemos a superfície da figura 11, em forma de concha.

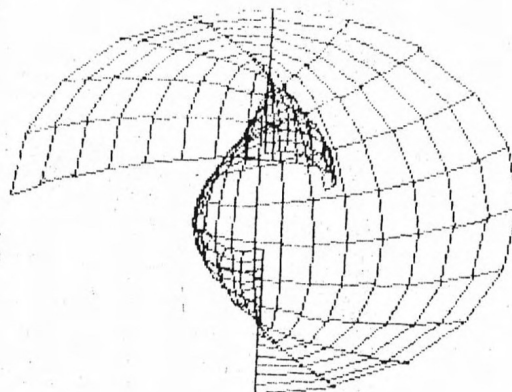


Fig. 11

3 Caso geral

1. Definição de uma superfície

Sejam u e v dois parâmetros quaisquer e sejam f , g e h três funções numéricas das variáveis u e v .

Consideremos $x=f(u,v)$, $y=g(u,v)$ e $z=h(u,v)$. Os três números assim definidos podem ser considerados como as coordenadas de um ponto do espaço.

Para u variando de u_{\min} e u_{\max} e v variando de v_{\min} a v_{\max} o conjunto dos pontos que têm como coordenadas $x=f(u,v)$, $y=g(u,v)$ e $z=h(u,v)$ constitui uma superfície.

2. Variáveis do programa

Os intervalos $[u_{\min}, u_{\max}]$ e $[v_{\min}, v_{\max}]$ são divididos respectivamente em $n_u - 1$ e $n_v - 1$ partes iguais.

Resulta daqui:

$$u_i = u_{\min} + (i-1) \left[\frac{u_{\max} - u_{\min}}{n_u - 1} \right]$$

para $1 \leq i \leq n_u$ e

$$v_j = v_{\min} + (j-1) \left[\frac{v_{\max} - v_{\min}}{n_v - 1} \right]$$

para $1 \leq j \leq n_v$.

Define-se assim, como nos casos precedentes, uma rede de pontos. Estes pontos têm como coordenadas:

$$\begin{aligned} x(i,j) &= f(u_i, v_j) \\ y(i,j) &= g(u_i, v_j) \\ z(i,j) &= h(u_i, v_j) \end{aligned}$$

Finalmente, o ponto de coordenadas $x(i,j)$, $y(i,j)$ e $z(i,j)$ será representado pelo ponto de coordenadas $w(i,j)$ e $q(i,j)$ no plano de projecção.

3. Programa

Devemos antes do mais definir as funções f , g e h nas linhas 10, 11 e 12.

O programa, ainda neste caso, é formado por cinco partes.

```
5 REM dados e calculo dos intervalos
10 DEF FN f(u,v)=(5+v*COS (u/2))
11 DEF FN g(u,v)=(5+v*COS (u/2))
12 DEF FN h(u,v)=(5+v*SIN (u/2))
```

```
12 DEF FN h(u,v)=v*SIN (u/2)
20 INPUT "Umin (em graus): ";u
min
30 INPUT "Umax (em graus): ";u
max
40 INPUT "Vmin (em graus): ";v
min
50 INPUT "Vmax (em graus): ";v
max
60 INPUT "NU: ";nu
70 INPUT "NV: ";nv
80 DIM u(nu)
90 DIM v(nv)
100 FOR i=1 TO nu
110 LET u(i)=umin+(i-1)*(umax-umin)/(nu-1)
120 NEXT i
130 FOR j=1 TO nv
140 LET v(j)=vmin+(j-1)*(vmax-vmin)/(nv-1)
150 NEXT j
155 REM coordenadas dos pontos da rede
160 DIM x(nu,nv)
170 DIM y(nu,nv)
180 DIM z(nu,nv)
190 FOR i=1 TO nu
200 FOR j=1 TO nv
210 LET x(i,j)=FN f(u(i),v(j))
220 LET y(i,j)=FN g(u(i),v(j))
230 LET z(i,j)=FN h(u(i),v(j))
240 NEXT j
250 NEXT i
255 REM calculo da imagem
260 DIM w(nu,nv)
270 DIM q(nu,nv)
280 LET wmin=-10000
290 LET qmin=-10000
300 LET wmax=10000
310 LET qmax=10000
320 FOR i=1 TO nu
330 FOR j=1 TO nv
340 LET w(i,j)=x(i,j)+.375*y(i,j)
350 LET q(i,j)=z(i,j)+.375*y(i,j)
360 IF w(i,j)<wmin THEN LET wmi=w(i,j)
370 IF q(i,j)<qmin THEN LET qmi=q(i,j)
380 IF w(i,j)>wmax THEN LET wma=w(i,j)
390 IF q(i,j)>qmax THEN LET qma=q(i,j)
400 NEXT j
410 NEXT i
```

```

410 NEXT i
415 REM desenho da imagem
420 LET k1=1000/(wmax-wmin)
430 LET k2=1700/(qmax-qmin)
440 LET l1=1000-k1*wmax
450 LET l2=1700-k2*qmax
460 FOR i=1 TO nu
470 FOR j=1 TO nv
480 LET w(i,j)=k1*w(i,j)+l1
490 LET q(i,j)=k2*q(i,j)+l2
500 NEXT j
510 NEXT i
515 REM desenho
520 FOR i=1 TO nu
530 FOR j=1 TO nv
540 IF i<=nu-1 THEN PLOT w(i,j)
550 IF i<=nu-1 THEN PLOT w(i,j),q(i,j)
560 IF j<=nv-1 THEN PLOT w(i,j)
570 IF j<=nv-1 THEN PLOT w(i,j),q(i,j)
580 NEXT j
590 NEXT i

```

4. Exemplos

1.º O cilindro da figura 12 tem como representação $x = \cos u$, $y = \sin u$ e $z = v$.

escolhemos $u_{\min} = 0$, $u_{\max} = 6,28$, $v_{\min} = -4$ e $v_{\max} = 4$.

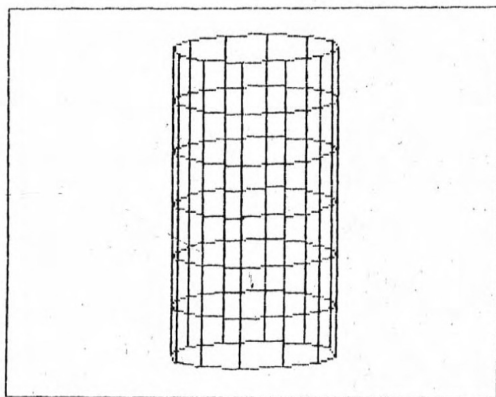


Fig. 12

2.º A figura 13 representa uma «fita de Moebius» de equações:

$$x = \left(5 + v \cos \frac{u}{2}\right) \cos u$$

$$y = \left(5 + v \cos \frac{u}{2}\right) \sin u$$

$$z = v \sin \frac{u}{2}$$

Escolheu-se $u_{\min} = 0$, $u_{\max} = 6,28$, $v_{\min} = -1$, $v_{\max} = 1$, $n_u = 30$ e $n_v = 2$.

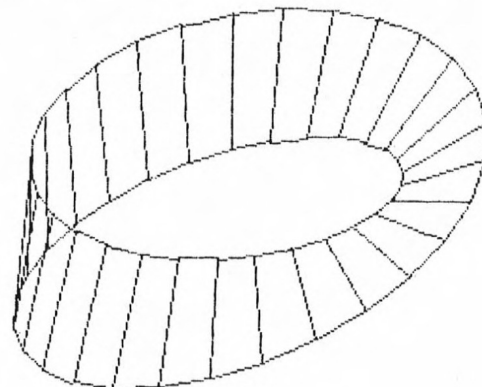


Fig. 13

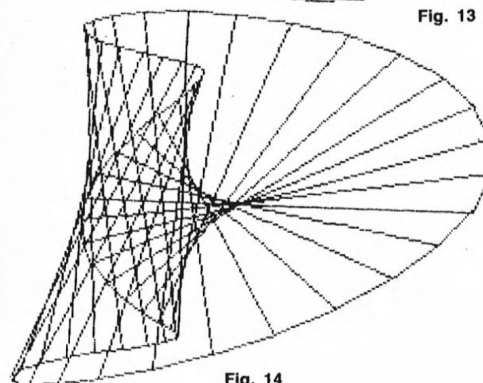


Fig. 14

3.º Substituindo o número 5 pelo número 0,5 nas equações que caracterizam a «fita de Moebius», obtemos a superfície da figura 14.

4.º Finalmente a figura 15 mostra um toro cuja representação é $x = (2 + \cos u) \cos v$, $y = (2 + \cos u) \sin v$, $z = \sin u$.

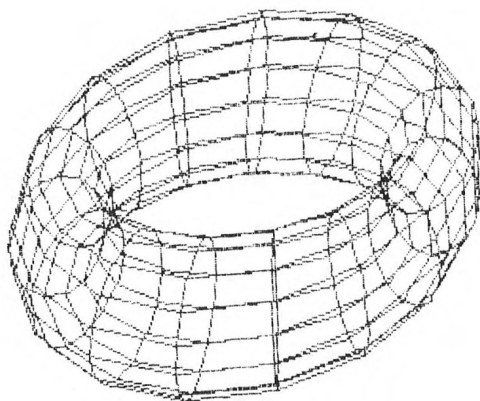


Fig. 15

5. Observações

1.º Consideremos $x = u$, $y = v$: obtemos $z = h(u, v) = h(x, y)$. Se bem que seja muito mais lento, este programa permite, portanto, obter todas as superfícies construídas recorrendo ao programa do capítulo 11, parágrafo 2.

2.º Do mesmo modo, podem obter-se as superfícies representadas por coordenadas cilíndricas. Basta considerar $x = u \cos v$, $y = u \sin v$ e $z = h(u, v)$.

A descoberta da perspectiva linear deve-se a dois florentinos, o arquitecto Filippo Brunelleschi (1377-1446) e o pintor Leon Battista Alberti (1404-1472).

Após esta invenção, o quadro passou a ser considerado como «uma janela aberta através da qual se vê o tema a pintar» (ver a figura 1).

A noção de raio visual permite em seguida associar a perspectiva linear a uma teoria física da visão.

A partir do século XVII, a perspectiva linear, considerada como moda científica de representação do espaço e «perspectiva verdadeira», viria a constituir o essencial no ensino académico em pintura e arquitectura.



Fig. 1. — Gravura de A. Dürer (1471-1528)

1 Definição e propriedades

1. O observador encontra-se em O_e ; escolhamos um plano de projecção P , o *quadro*. Seja M um ponto qualquer do espaço. Se a recta (O_eM) não for paralela ao plano P , ela encontra este plano em M' .

M' é a imagem de M na projecção cónica do centro O_e e plano P . A perspectiva linear é uma projecção cónica.

A figura 2 mostra como é possível obter a imagem de um cubo em projecção cónica.

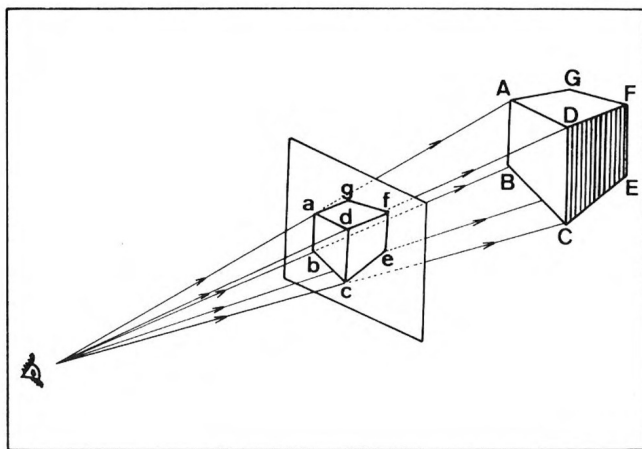


Fig. 2

Nesta figura, o plano de projecção está colocado entre o observador e o objecto, mas poderia encontrar-se atrás do objecto ou do observador.

Em qualquer caso, as dimensões da imagem podem ser muito superiores às do objecto.

2. Demonstra-se que uma projecção cónica mantém o alinhamento dos pontos: a imagem de uma recta é portanto uma recta.

Pelo contrário, o paralelismo não é conservado: as imagens de duas rectas paralelas não são, em geral, rectas paralelas.

Consideremos, por exemplo, a imagem de um cubo. Conforme a disposição do plano de projecção relativamente ao cubo, podem verificar-se três casos:

1.º Se o plano de projecção é paralelo a uma face do cubo, existe apenas um ponto de fuga. Na imagem, duas famílias de arestas são paralelas (figura 3a).

2.º Se o plano de projecção não é paralelo a qualquer das faces do cubo, mas é paralelo a uma família de arestas, verifica-se a existência de dois pontos de fuga (figura 3b).

3.º Se o plano de projecção não é paralelo a qualquer das arestas do cubo, existem então três pontos de fuga (figura 3c).

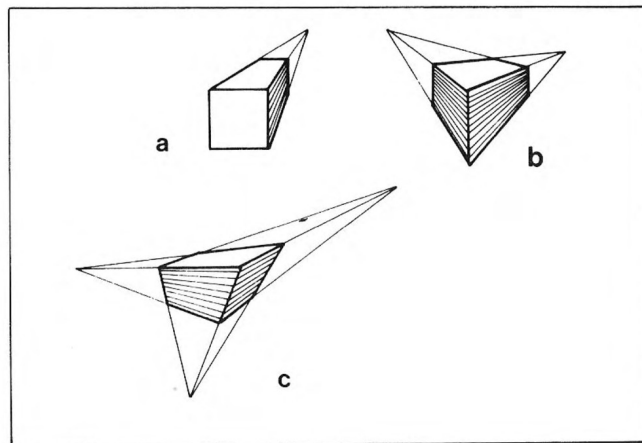


Fig. 3

2 Fórmulas fundamentais

As coordenadas de M' , imagem de M numa projecção cónica, exprimem-se simplesmente em função das de M desde que se escolha como referencial um sistema de coordenadas ligado à posição do observador.

1. Definições

O olho do observador está colocado em O_e e este ponto constitui a origem de um sistema ortonormado considerado «ligado ao observador».

Neste sistema O_eUVW , o eixo O_eV constitui a linha de vista, isto é, a direcção em que o observador olha.

O plano de projecção é escolhido de modo a ser perpendicular à linha de vista. Está colocado a uma distância d do observador.

2. Cálculos

Seja $M = (u, v, w)$ um ponto do espaço.

Se $v \neq 0$, M' existe e tem como coordenadas u' , v' e w' no sistema O_euvw (figura 4).

Os triângulos O_eTH' e O_eKH são homotéticos:

$$\frac{O_eT}{O_eK} = \frac{TH'}{KH} = \frac{O_eH'}{O_eH}$$

Resulta daqui:

$$u' = u \times \frac{d}{v}$$

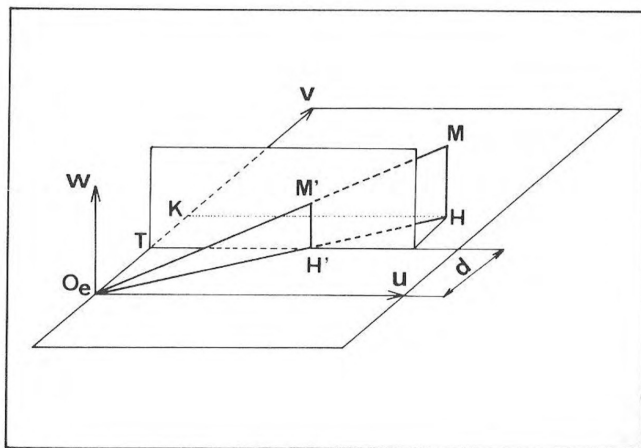


Fig. 4

Os triângulos $O_eH'M'$ e O_eHM são igualmente homotéticos:

$$\frac{M'H'}{MH} = \frac{O_eH'}{O_eH}$$

Donde resulta:

$$w' = w \times \frac{d}{v}$$

3. Conclusões

Seja M um ponto de coordenadas u , v e w no sistema ligado ao observador.

Para $v \neq 0$, M tem como imagem M' , cujas coordenadas, neste sistema, são $u' = u \frac{d}{v}$ e $w' = w \frac{d}{v}$.

Resulta daqui que, no plano de projecção, se podem escolher u' e v' como coordenadas de M' .

3 Cálculo da imagem de um objecto

Este cálculo será efectuado em várias etapas, consistindo o essencial do cálculo em mudar de referencial.

Para tal, utilizar-se-á o método já usado no capítulo 5, parágrafo 5.2. Note-se que este método não é o único, existindo outros.

1. Descrição do objecto

Escolhe-se um sistema ortonormado, o sistema de definição, relativamente ao qual se calcularão as coordenadas dos diferentes pontos característicos do objecto a representar.

2. Escolha da posição do observador

Este encontra-se colocado em O_2 , de coordenadas x_0 , y_0 , z_0 relativamente ao referencial de definição $Oxyz$.

3. Escolha da linha de vista

O observador vê um ponto P_v de coordenadas x_v , y_v e z_v relativamente ao referencial de definição.

A linha de vista é a recta $O_2 P_v$.

Esta recta só existe se $P_v \neq O_2$: deveremos, portanto, ter $x_v \neq x_0$, $y_v \neq y_0$.

Nos programas mais «profissionais», define-se a linha de vista recorrendo a três ângulos. Consultar a obra de J. L. Vurdy indicada na bibliografia.

4. Escolha do plano de projecção

Este será colocado entre o observador e o objecto, perpendicularmente à linha de vista, a uma distância d do observador.

No referencial ligado ao observador, devemos ter portanto $d > 0$.

5. Mudança de sistema

O sistema de definição $Oxyz$ deve ser substituído pelo sistema ligado ao observador, $O_2 u v w$.

Isto equivale a determinar três vectores unitários \vec{i}_2 , \vec{j}_2 e \vec{k}_2 ortogonais entre si e formando uma base directa.

O eixo $O_2 v$ deve apontar para o ponto observado P_v : deveremos, portanto, escolher o vector unitário da recta $O_2 P_v$ como vector \vec{j}_2 .

Designemos por d_1 a distância que separa o observador do ponto visado:

$$d_1 = \sqrt{(x_v - x_0)^2 + (y_v - y_0)^2 + (z_v - z_0)^2}$$

Como $P_v \neq O_2$, temos $d_1 \neq 0$; consideremos portanto:

$$a = \frac{x_v - x_0}{d_1}, \quad b = \frac{y_v - y_0}{d_1}, \quad c = \frac{z_v - z_0}{d_1}$$

Dado que $\vec{O_2 P_v} = (x_v - x_0, y_v - y_0, z_v - z_0)$, $\vec{j}_2 = (a, b, c)$.

Seja agora $d_2 = \sqrt{a^2 + b^2}$ se $x_v \neq x_0$ ou seja $y_v \neq y_0$, teremos $d_2 \neq 0$.

O vector $\vec{i}_2 = \left(\frac{b}{d_2}, -\frac{a}{d_2}, 0\right)$ existe portanto, é unitário e ortogonal a \vec{j}_2 .

Para terminar, consideremos $\vec{k}_2 = \vec{i}_2 \wedge \vec{j}_2$: obtemos então

$$\vec{k}_2 = \left(-\frac{ac}{d_2}, -\frac{bc}{d_2}, 1\right)$$

O sistema $(O_2, \vec{i}_2, \vec{j}_2, \vec{k}_2)$ constitui o referencial $O_2 uvw$ procurado.

6. Cálculo das novas coordenadas

Seja P um ponto de coordenadas x, y, z no sistema $Oxyz$ e de coordenadas u, v, w no sistema $O_2 uvw$.

As fórmulas do capítulo 2, parágrafo 6.2 permitem escrever:

$$\begin{aligned} u &= \frac{b}{d_2} (x - x_0) - \frac{a}{d_2} (y - y_0) \\ v &= a (x - x_0) + b (y - y_0) + c (z - z_0) \\ w &= -\frac{ac}{d_2} (x - x_0) - \frac{bc}{d_2} (y - y_0) + d_2 (z - z_0) \end{aligned}$$

7. Coordenadas da imagem

Seja $P' = (u', v', w')$ a imagem de P . O plano de projecção é paralelo ao plano $O_2 uw$. u' e w' são, portanto, as coordenadas de P' num referencial ortonormado deste plano de projecção.

Aplicam-se então as fórmulas do parágrafo 2.3.

4 Corte da imagem

O campo visual do observador constitui a pirâmide de visão. A figura 5, extraída de uma gravura de A. Bosse (1602-1676), permite compreender como é definida esta pirâmide.

Os objectos situados fora desta pirâmide não são evidentemente vistos pelo observador.

Os objectos colocados parcialmente fora desta pirâmide só são vistos em parte, tornando-se necessário proceder àquilo a que chamaremos corte da imagem.

Esta operação necessita de um tempo de cálculo extremamente importante, pelo que nos contentaremos com indicar o seu princípio, baseado no algoritmo de Cohen-Sutherland.

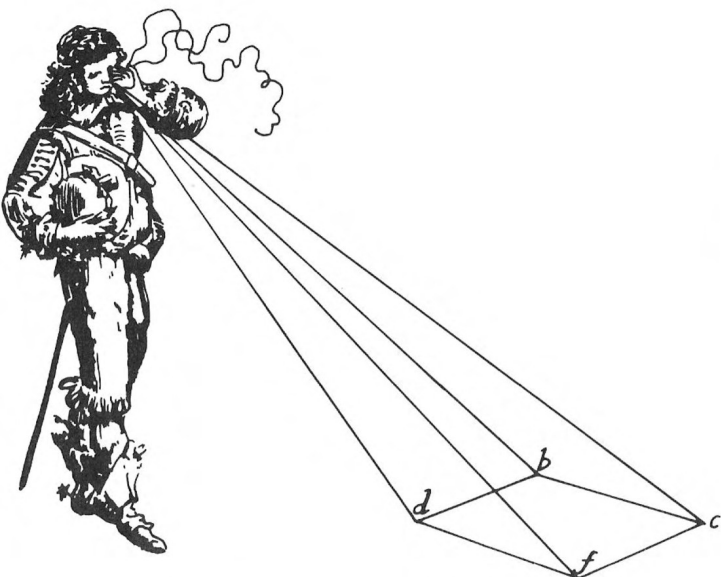


Fig. 5. — Segundo gravura de A. Bosse. Século XVII

1. Equações da pirâmide de visão

Sejam h a altura do visor, L a sua largura e d a distância do observador ao plano de projecção.

Seja $O_e u v w$ o referencial ligado ao observador e seja $M = (u, v, w)$ um ponto qualquer do espaço.

Por M passa um plano paralelo ao plano de projecção. Este plano corta a pirâmide de visão em A, B, C e D (figura 6).

Os planos $O_e AB$, $O_e CD$, $O_e AD$ e $O_e BC$ têm, respectivamente, por equações:

$$\begin{aligned} 0 \ u + h \ v - 2d \ w &= 0 \\ 0 \ u - h \ v - 2d \ w &= 0 \\ 1 \ u - 2d \ v + 0 \ w &= 0 \\ 1 \ u + 2d \ v + 0 \ w &= 0 \end{aligned}$$

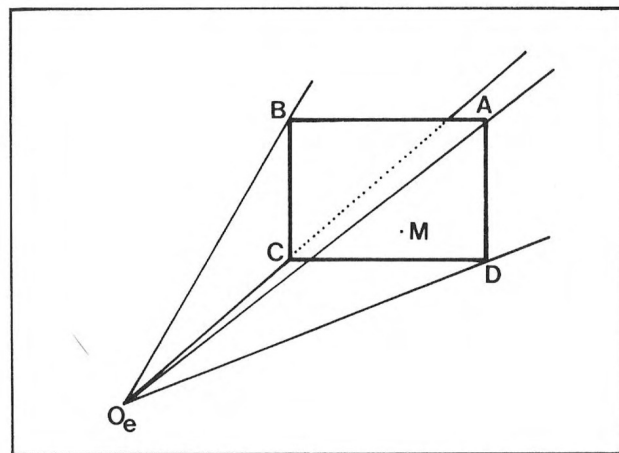


Fig. 6

2. Os indicadores de posição

A cada ponto $M = (u, v, w)$ pode associar-se um indicador de posição: trata-se de um código binário de quatro casas que permite definir a posição de M relativamente aos planos $O_e AB$, $O_e CD$, $O_e AD$ e $O_e BC$.

Para determinar este indicador, procede-se do seguinte modo:

- O indicador é inicializado para 0000;
- Se $w \geq \frac{h v}{2 d}$, M encontra-se acima do plano $O_e AB$ e coloca-se 1 na primeira casa do código;
- Se $w \leq -\frac{h v}{2 d}$, M encontra-se abaixo do plano $O_e CD$ e coloca-se 1 na segunda casa do código;
- Se $u \geq \frac{2 v d}{1}$, M encontra-se à direita do plano $O_e AD$ e coloca-se 1 na terceira casa do código;
- Finalmente, se $u \leq -\frac{2 v d}{1}$, M está à esquerda do plano $O_e BC$ e coloca-se 1 na última casa do código.

Obtemos assim nove indicadores de posição possíveis, um para cada uma das nove regiões do espaço onde se pode encontrar o ponto M (figura 7).

1 0 0 1 B	1 0 0 0	1 0 1 0 A
0 0 0 1	0 0 0 0	0 0 1 0
0 1 0 1 C	0 1 0 0	D 0 1 1 0

Fig. 7

3. Visibilidade de uma aresta

Seja M_1M_2 uma aresta qualquer do poliedro a representar.

Para qualquer ponto M da recta (M_1M_2) existe um número k tal que $\vec{M_1M} = k \vec{M_1M_2}$. Esta igualdade constitui a equação vectorial da recta (ver o capítulo 4).

Se $0 \leq k \leq 1$, M pertence ao segmento $[M_1, M_2]$.

Podemos utilizar esta propriedade para determinar a parte visível da aresta $[M_1M_2]$.

A recta (M_1M_2) corta as rectas (AB), (BC), (CD) e (DA) em pelo menos dois pontos ou em quatro no máximo.

Quando existem os quatro, designaremos estes pontos por I_1, I_2, I_3 e I_4 .

As equações das rectas (M_1M_2) , (AB), (BC), (CD) e (DA) podem facilmente ser determinadas. Permitem calcular as coordenadas dos pontos I_1, I_2, I_3 e I_4 .

A equação vectorial da recta (M_1M_2) permite em seguida associar os números k_1, k_2, k_3 e k_4 a cada um dos pontos.

Conforme o valor dos indicadores de posição de M_1 e de M_2 , ser-nos-á necessário distinguir três casos.

1.º caso:

Os dois indicadores valem 0000 cada um (figura 8).

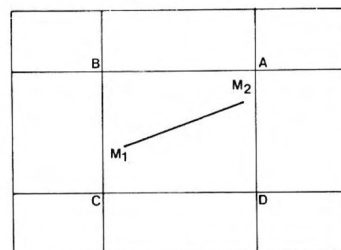


Fig. 8. — M_1 e M_2 são visíveis. Desenha-se a aresta M_1M_2

2.º caso:

Só um indicador é igual a 0000, por exemplo o de M_1 .

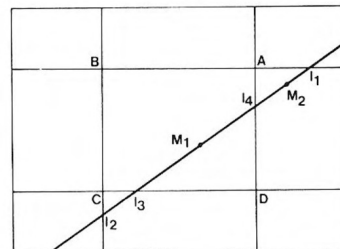


Fig. 9. — Só k_4 está compreendido entre 0 e 1. Desenha-se M_1I_4

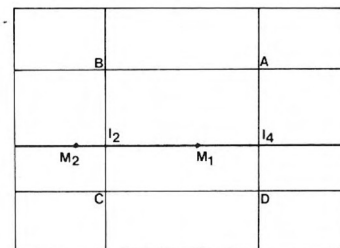


Fig. 10. — Só k_2 está compreendido entre 0 e 1. Desenha-se M_1I_2

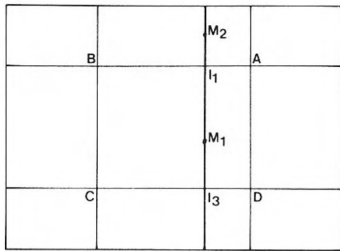


Fig. 11. — Só k_1 está compreendido entre 0 e 1. Desenha-se M_1I_1

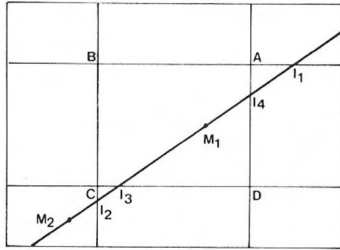


Fig. 12. — k_2 e k_3 estão compreendidos entre 0 e 1. k_3 é menor do que k_2 . Desenha-se M_1I_3

3.º caso:
Nenhum indicador é igual a 0000.

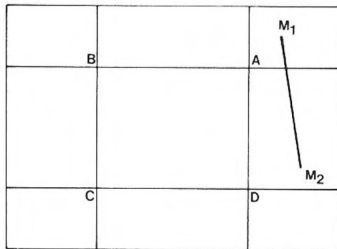


Fig. 13. — Só os 2 indicadores possuem um 1 na mesma casa, a aresta $[M_1M_2]$ não é visível

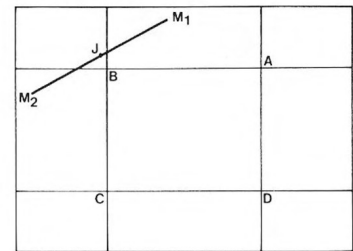


Fig. 14. — Se os 2 indicadores não possuem um 1 na mesma posição, substitui-se a aresta $[M_1M_2]$ pelas duas arestas $[M_1J]$ e $[JM_2]$, designando J o meio de $[M_1M_2]$

Ao fim de algumas etapas, cair-se-á necessariamente num destes casos.

5 Programa simplificado

Representemos, em projecção cónica, a casa da figura 15.

Utilizaremos um programa englobando sete partes.

Este programa é considerado simplificado na medida em que foi evitado o recurso a um procedimento de corte.

1. Descrição da casa

Numeremos os vértices do modo indicado na figura 16 e calculemos as coordenadas destes vértices relativamente ao referencial Oxyz.

Obtemos a tabela seguinte:

Número	x	y	z
1	-50	-40	0
2	50	-40	0
3	50	40	0
4	-50	40	0
5	-50	-40	30
6	50	-40	30
7	50	40	30
8	-50	40	30
9	-50	0	80
10	50	0	80
11	50	-10	0
12	50	-10	20
13	50	10	20
14	50	10	0

O conteúdo desta tabela está guardado numa instrução DATA.

211

4. Mudança de sistema

Calculamos as coordenadas u, v, w de cada vértice no sistema ligado ao observador.

```

175 REM mudança de referencial
180 LET a=(xv-xo)/d1
190 LET b=(yv-yo)/d1
200 LET c=(zv-zo)/d1
210 LET d2=SOR(a*a+b*b)
220 IF d2=0 THEN PRINT "O OBSER
VADOR NAO PODE ESTAR AQUI": GO T
O
230 REM novas coordenadas
240 DIM u(14)
250 DIM v(14)
260 DIM w(14)
270 FOR i=1 TO 14
280 LET u(i)=b*(x(i)-xo)/d2-a*(
y(i)-yo)/d2
290 LET v(i)=a*(x(i)-xo)+b*(y(i)
)-yo)+c*(z(i)-zo)
300 LET w(i)=-a*c*(x(i)-xo)/d2-
b*c*(y(i)-yo)/d2+d2*(z(i)-zo)
310 NEXT i

```

5. Cálculo da imagem

As variáveis x, y e z podem ser reutilizadas. Designaremos, portanto, por x e y as coordenadas de cada vértice no plano de projecção. Calculamos x e y graças às fórmulas do parágrafo 2.3.

```

305 REM calculo da imagem
310 LET xmin=10000
320 LET ymin=10000
330 LET xmax=-10000
340 LET ymax=-10000
350 FOR i=1 TO 14
360 LET x(i)=u(i)*de/v(i)
370 LET y(i)=w(i)*de/v(i)
380 IF x(i)>xmax THEN LET xmax=
x(i)
390 IF y(i)>ymax THEN LET ymax=
y(i)
400 IF x(i)<xmin THEN LET xmin=
x(i)
410 IF y(i)<ymin THEN LET ymin=
y(i)
420 NEXT i

```

6. Enquadramento da imagem

Actuamos em dois tempos:

1.º A cada ponto (x, y) da imagem é associado, pelo procedimento do capítulo 3, um ponto de coordenadas k_1x+l_1 e k_2y+l_2 .

Os parâmetros k_1 , k_2 , l_1 e l_2 são calculados de modo a inscrever a imagem num rectângulo de 150×250 .

Designamos ainda por x e y as coordenadas obtidas.

2.º Quanto mais afastado estiver o observador do objecto, mais reduzidas são as dimensões da imagem.

Para ter em conta este facto, associamos ao ponto (x, y) o ponto que tem como coordenadas:

$$x \times \frac{d_{\min}}{d_1}$$

e

$$y \times \frac{d_{\min}}{d_1}$$

```

425 REM enquadramento da imagem
430 LET g=(ymax-ymin)/(xmax-xmi
n)
440 IF g>.6 THEN LET h=150: LET
l=h/g
450 IF g<=.6 THEN LET l=250: LE
T h=l*g
460 LET k1=l/(xmax-xmin)
470 LET k2=h/(ymax-ymin)
480 LET l1=l/2-k1*xmax
490 LET l2=h/2-k2*ymax
500 FOR i=1 TO 14
510 LET x(i)=dmin/d1*(k1*x(i)+l
1)
520 LET y(i)=dmin/d1*(k2*y(i)+l
2)
530 NEXT i

```

7. Desenho da perspectiva

```

535 REM instrucoes de desenho
540 DATA 1,0,0,0,0,4,4,1,1,0,0,
0,0,7,4,0,0,0,0,7,7,0,0,0,0,10,7
,10,0,0,0,0,10,11,10,10,13,13,
14
550 FOR i=1 TO 20
560 READ s,t
570 PLOT 100+x(s),00+y(s)
580 DRAW x(t)-x(s),y(t)-y(s)
590 NEXT i

```

8. Condições a respeitar para obter uma imagem

O método escolhido para efectuar uma mudança de referencial obriga a não usar $x_v = x_o$ e $y_v = y_o$ simultaneamente. Se esta condição for respeitada, o parâmetro d_z da linha 210 não é nulo e obtemos uma imagem.

9. Algumas perspectivas obtidas

1.º As figuras 17, 18, 19, 20 e 21 mostram a casa tal como é vista por um observador que se aproxime em linha recta.



Fig. 17



Fig. 18

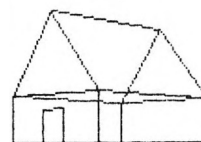


Fig. 19

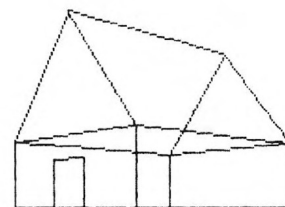


Fig. 20

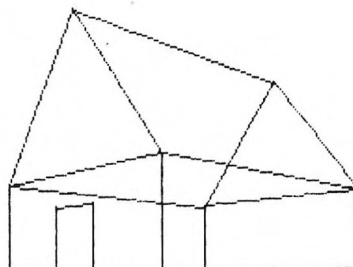


Fig. 21

2.º As figuras 22, 23, 24 e 25 mostram a casa vista a partir de posições bastante diferentes entre si.

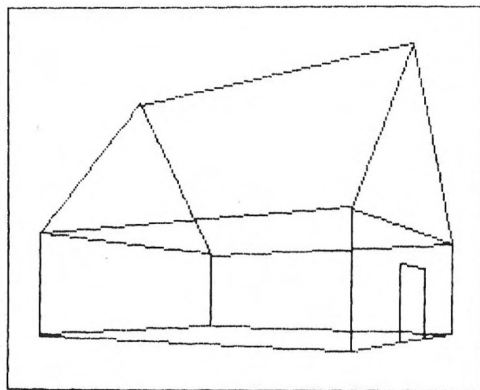


Fig. 22

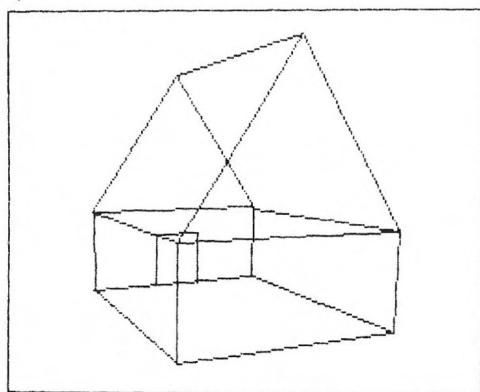


Fig. 23

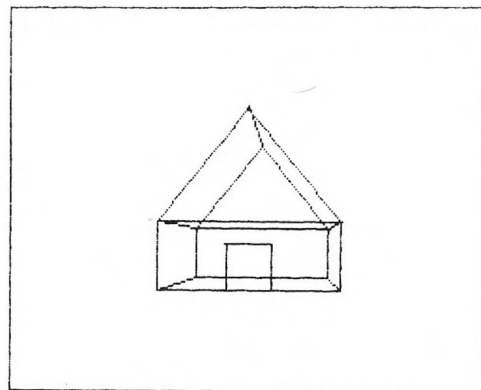


Fig. 24

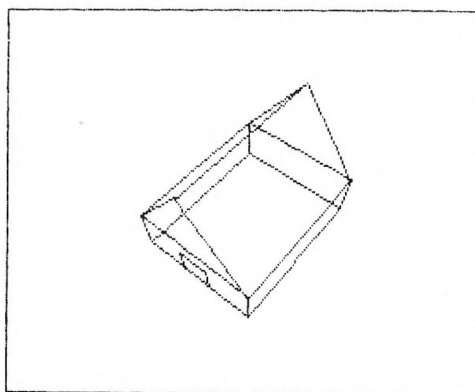


Fig. 25

3.º As figuras 26, 27, 28 e 29 mostram a imagem da casa para uma distância reduzida entre o observador e a casa. As distorções obtidas permitem compreender que a projecção cónica não corresponde de facto ao funcionamento da nossa vista em visão próxima.

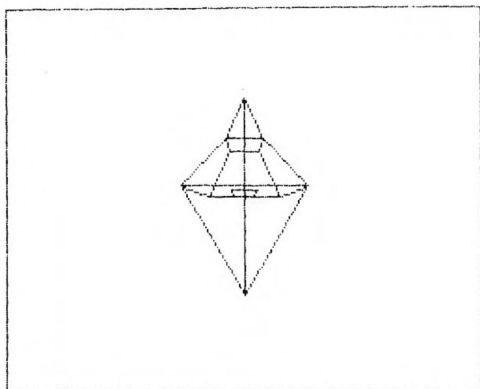


Fig. 26

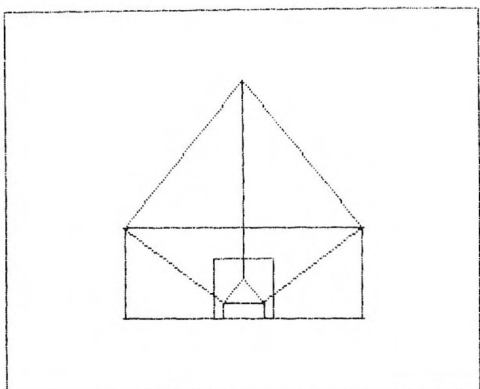


Fig. 27

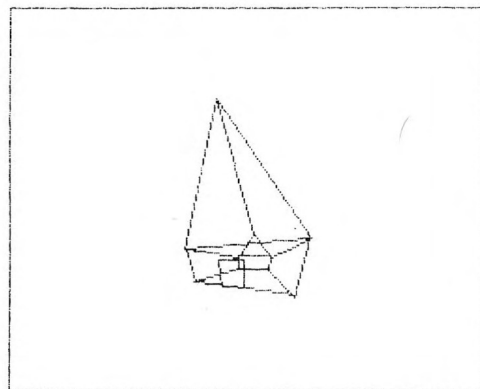


Fig. 28

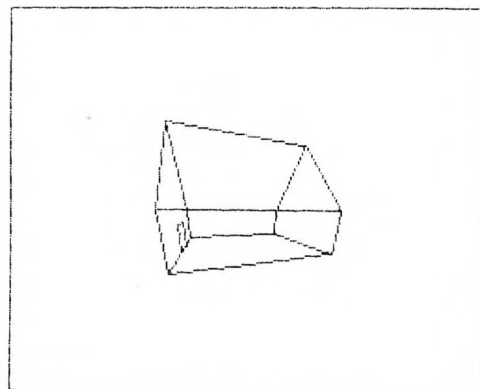


Fig. 29

Classificámos as obras citadas em cinco categorias.

1. Sobre os aspectos técnicos da perspectiva:

La Perspective, PUF, Colecção «Que sais-je?».
Gaufrey, J.-H., *La perspective dans le dessin technique*, Dunod, Paris, 1970.

2. Sobre a história da perspectiva:

Deforgue, Y., *Le graphisme technique, son histoire et son enseignement*, Éd. du Champ Vallon, Mâcon, 1981.
Image et imaginaires d'architecture, Centre Pompidou.
Francastel, P., *Peinture et société*, Gonthier-Denoël, Paris, 1977.
Panofsky, *La Perspective comme forme symbolique*, Minuit, Paris, 1975.
Baltrúsaitis, J., *Anamorphoses*, Pygmalion, Paris, 1969.

3. Sobre os poliedros:

Holden, A., *Formes, espace et symétries*, Nathan/Cedic, Paris, 1977.

4. Sobre o grafismo 3D:

La réalisation des logiciels graphiques interactifs, obra colectiva, Eyrolles, Paris, 1982.
Vuldy, J.-L., *Graphisme 3D sur votre ordinateur*, Eyrolles, Paris, 1983.
Dony, R., *Graphisme scientifique*, Masson, Paris, 1984.
Lehning, H., e Jakubowicz, D., *Mathématiques par l'informatique individuelle*, tomo 4: *Graphisme*, Masson, Paris, 1984.

5. Revistas:

Sciences et Techniques, número especial, Maio de 1984.
La Recherche, número especial, Maio de 1983.
Micro-Systèmes, números 36 e 37.

PREFÁCIO	9
1. GENERALIDADES SOBRE GRAFISMOS A TRÊS DIMENSÕES	11
1. Descrição de um objecto	15
2. O cálculo de uma imagem	17
3. Produção da imagem	18
4. Acção sobre a imagem	18
5. O material	19
2. COORDENADAS CARTESIANAS — VECTORES	20
1. Coordenadas cartesianas	20
2. Bases ortonormadas	22
3. Coordenadas e norma de um vector	23
4. Produto escalar	23
5. Produto vectorial	24
6. Mudança de referencial	26
3. TRANSFORMAÇÕES PONTUAIS	29
1. Definição analítica de uma transformação pontual	29
2. Visualização de um ponto no espaço	29
3. Enquadramento da imagem	30
4. Deslocamentos do objecto a representar	35
4. RECTAS E PLANOS NO ESPAÇO	38
1. Rectas	38
2. Planos	40
3. Intersecções	44
5. PROJEÇÕES CILÍNDRICAS	49
1. Definições	49
2. Propriedades das projecções cilíndricas	50
3. Coordenadas da projecção de um ponto	53
4. Perspectiva ortográfica	54
5. Perspectiva oblíqua	57
6. Projecção de uma curva não contida num plano	63
6. A PERSPECTIVA CAVALEIRA	68
1. Representação de um poliedro	69
2. Representação de um círculo	70
3. Fórmulas de cálculo	71

4. Um exemplo detalhado: o cubo	73	14. REPRESENTAÇÕES PARAMÉTRICAS DAS SUPERFÍCIES	181
5. Perspectiva de uma curva	79	1. As coordenadas cilíndricas	181
7. PRISMAS E PIRÂMIDES	82	2. Coordenadas esféricas	187
1. Os prismas e os troncos de prisma	82	3. Caso geral	192
2. Pirâmides e troncos de pirâmides	84	15. AS PROJEÇÕES CÔNICAS	197
3. Primeiro exemplo: prisma recto	85	1. Definição e propriedades	198
4. Segundo exemplo: prismas com partes curvas	90	2. Fórmulas fundamentais	199
5. Terceiro exemplo: pirâmide	95	3. Cálculo da imagem de um objecto	201
8. PARTES ESCONDIDAS DE UM POLIEDRO CONVEXO	99	4. Corte da imagem	203
1. Poliedros convexos e não convexos	100	5. Programa simplificado	209
2. Orientação das facetas	102	BIBLIOGRAFIA	220
3. Como reconhecer as partes escondidas	102		
4. Utilização de um produto vectorial	104		
5. Um exemplo detalhado, o do cubo	106		
9. OS POLIEDROS REGULARES	110		
1. Definição	110		
2. Construção da imagem	111		
3. O tetraedro regular	111		
4. O octaedro	113		
5. O dodecaedro	116		
6. O icosaedro	120		
10. OS POLIEDROS CONVEXOS SEMI-REGULARES	125		
1. Os sólidos de Arquimedes	125		
2. Primeiro exemplo: o octaedro truncado	126		
3. Segundo exemplo: o cuboctaedro	131		
4. Prismas e antiprismas de Kepler	134		
11. AS SUPERFÍCIES DEFINIDAS POR UMA EQUAÇÃO $Z = F(X, Y)$	138		
1. Princípio geral da representação	138		
2. Primeiro programa	140		
3. Exemplos	142		
4. Eliminação das partes escondidas	144		
5. Segundo programa	148		
6. Exemplos	150		
12. AS SUPERFÍCIES DE REVOLUÇÃO	153		
1. Superfície de equação $x = f(x^2 + y^2)$	153		
2. Superfícies de equação $x = f(r)$	159		
3. Construção aproximada de uma superfície de revolução	160		
4. Construção aproximada de um cilindro recto	162		
5. Construção aproximada de um elipsóide	166		
13. CONES E CILINDROS	169		
1. Caso do cilindro	170		
2. Cone	175		